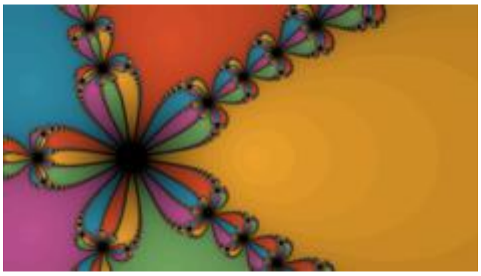
FACULTEIT WETENSCHAPPEN

De methode van Newton-Raphson - the Newton-Raphson method.



Toon Baeyens, vakgroep Toegepaste Wiskunde, Informatica en Statistiek / Department of Applied Mathematics, Computer Science and Statistics

Een vaak voorkomend probleem in de wiskunde is: bepaal de nulpunten van een gegeven functie. De exacte wiskundige bepaling van nulpunten is slechts voor een beperkt aantal types functies mogelijk, in andere gevallen kan men de nulpunten alleen benaderend bepalen via numerieke technieken. Een van de populairste methoden hiervoor is de de Newton-Raphson-methode.

Het idee van deze methode is als volgt: startend van een willekeurige startwaarde, genereert deze methode een nieuwe waarde, die dan op zijn beurt gebruikt wordt als startwaarde. Dit proces wordt herhaald tot er convergentie is: dit betekent dat er, binnen een gegeven nauwkeurigheid, een nulpunt is gevonden.

Men kan bewijzen dat deze methode altijd werkt indien de startwaarde voldoende 'dicht genoeg' bij het nulpunt ligt. De vraag is echter wat 'dichtbij genoeg' betekent. Deze figuur, die zich afspeelt in het complexe vlak, probeert dit te visualiseren.

De figuur is specifiek gemaakt voor het geval f(z)=z5-1. Deze complexe functie heeft vijf complexe nulpunten, die de hoekpunten vormen van een regelmatige vijfhoek, ingeschreven in een cirkel met straal 1 en middelpunt 0. Een van de nulpunten is het punt 1, een tweede is benaderd 0.309 + 0.951 i.

Determining the roots of a function is a very common problem in mathematics. Doing this exact symbolically is for only a small subset of functions possible. In most cases one has to restort to numerical methods that approximate the roots. One of the best known algorithms is the Newton-Raphson method.

The main idea of this method is simple: given an initial guess for a root, a new improved estimate is calculated. In turn, this new estimate will be used as an initial guess. These improvements are repeated until there is convergence. More concretely, until, within a certain accuracy, a root is found.

It is proven that this method will always work as long as the initial value is 'close enough' to a root of the function. The question "what does 'close enough' mean?" naturally arises. This image, in the complex plane, tries to visualize this.

This image is specifically made for the function f(z)=z5-1. This complex function has five roots. These roots are located on the vertices of a regular pentagon, inscribed in the unit circle. For example: one of the zeros is 1, a second one is approximately 0.309 + 0.951 i.

UNIVERSITEIT GENT

Het punt 0 bevindt zich in het centrum van de zwarte regio. Het punt 1 kan je vinden in het felste deel van de gele regio. Voor elk punt z van het complex vlak voeren we de methode van Newton-Raphson uit met initiële gok z. Het kleur dat dit punt krijgt, wordt bepaald door twee factoren: als eerste kleuren we het punt geel, rood, blauw, paars of groen, afhankelijk van naar welk nulpunt het algoritme convergeerde. Zo worden alle punten die convergeren naar 1 geel. De punten die convergeren naar 0.309 + 0.951 i worden rood gekleurd. De tweede factor is de snelheid van convergentie (m.a.w. hoeveel stappen er gezet dienen te worden): wanneer het algoritme snel convergeert voor een gegeven startpunt, dan wordt dit punt fel gekleurd, maar wanneer de convergentie traag is, zal het punt donker gekleurd worden. Wanneer een bepaalde initiële gok zelfs helemaal niet convergeert binnen een vooropgesteld maximaal aantal stappen, zullen we het zwart kleuren. Zo kan je zien dat punten rond 0 zeer traag of zelfs helemaal niet convergeren.

Deze afbeelding illustreert dat zelfs een eenvoudige procedure kan leiden tot heel complexe figuren (Newton-fractalen genoemd) en dat het helemaal niet gemakkelijk is te voorspellen welke startwaarden goed of minder goed zijn.

The origin (the point 0) lies in the center of the black region. The point 1 is located in the brightest part of the big yellow region. The function that is used is f(z) = z5-1. For each point z of the complex plane the Newton-Raphson method is applied on the function f with the initial guess being z. The color that is drawn in the point z is determined by two fators: the hue is one of yellow, red, blue, purple or green, depending on to which zero the algorithm converged. For example if the algorithm converged to 1 the point is colored yellow. If the algorithm did converge to 0.309 + 0.951 i the color red is used. The brightness is controlled by the speed of convergence, if the algorithm converged quickly the point is very bright (for example around 1), if the convergence was slow the point is colored darker. And if the point did not converge it is colored black. One could notice that the convergence for initial guesses around 0 is very slow.

This image is very interesting because it stems from a relative simple procedure: just coloring convergent points. But the resulting image is very surprising. It seems not that straight forward to predict which initial guesses will converge to which roots.