Hoofdstuk 3: Partiële differentiaalvergelijkingen

Wiskunde: gevorderde technieken

prof. dr. Marnix Van Daele

Vakgroep Toegepaste Wiskunde, Informatica en Statistiek
Universiteit Gent

bacheloropleiding chemie
academiejaar 2019-2020

Inhoudstafel

Inleiding
- Karakteristieken
- Hoe PDVn oplossen?

Classificatie

Randvoorwaarden

Tijdsafhankelijke problemen

Tijdsonafhankelijke problemen

Partiële differentiaalvergelijkingen

Partiële differentiaalvergelijkingen of (PDVn) bevatten partiële afgeleiden naar meer dan één onafhankelijke veranderlijke.

De onafhankelijke veranderlijken zijn typisch één of meedere ruimtelijke veranderlijken en eventueel ook de tijd.

Hoe groter het aantal dimensies, hoe ingewikkelder de formulering van het probleem: er bestaan

- pure beginwaardenproblemen,
- pure randwaardenproblemen
- of zelfs een mix van beide.

De vergelijking en de randwaarden kunnen gedefinieerd zijn over een regelmatig of een onregelmatig domein.

Partiële differentiaalvergelijkingen

Partiële differentiaalvergelijkingen of (PDVn) bevatten partiële afgeleiden naar meer dan één onafhankelijke veranderlijke.

De onafhankelijke veranderlijken zijn typisch één of meedere ruimtelijke veranderlijken en eventueel ook de tijd.

Hoe groter het aantal dimensies, hoe ingewikkelder de formulering van het probleem: er bestaan

- pure beginwaardenproblemen,
- pure randwaardenproblemen
- of zelfs een mix van beide.

De vergelijking en de randwaarden kunnen gedefinieerd zijn over een regelmatig of een onregelmatig domein.

Partiële differentiaalvergelijkingen

Partiële differentiaalvergelijkingen of (PDVn) bevatten partiële afgeleiden naar meer dan één onafhankelijke veranderlijke.

De onafhankelijke veranderlijken zijn typisch één of meedere ruimtelijke veranderlijken en eventueel ook de tijd.

Hoe groter het aantal dimensies, hoe ingewikkelder de formulering van het probleem: er bestaan

- pure beginwaardenproblemen,
- pure randwaardenproblemen
- of zelfs een mix van beide.

De vergelijking en de randwaarden kunnen gedefinieerd zijn over een regelmatig of een onregelmatig domein.

Partiële differentiaalvergelijkingen

Partiële differentiaalvergelijkingen of (PDVn) bevatten partiële afgeleiden naar meer dan één onafhankelijke veranderlijke.

De onafhankelijke veranderlijken zijn typisch één of meedere ruimtelijke veranderlijken en eventueel ook de tijd.

Hoe groter het aantal dimensies, hoe ingewikkelder de formulering van het probleem: er bestaan

- pure beginwaardenproblemen,
- pure randwaardenproblemen
- of zelfs een mix van beide.

De vergelijking en de randwaarden kunnen gedefinieerd zijn over een regelmatig of een onregelmatig domein.

Partiële differentiaalvergelijkingen

Partiële differentiaalvergelijkingen of (PDVn) bevatten partiële afgeleiden naar meer dan één onafhankelijke veranderlijke.

De onafhankelijke veranderlijken zijn typisch één of meedere ruimtelijke veranderlijken en eventueel ook de tijd.

Hoe groter het aantal dimensies, hoe ingewikkelder de formulering van het probleem: er bestaan

- pure beginwaardenproblemen,
- pure randwaardenproblemen
- of zelfs een mix van beide.

De vergelijking en de randwaarden kunnen gedefinieerd zijn over een regelmatig of een onregelmatig domein.

Partiële differentiaalvergelijkingen

Partiële differentiaalvergelijkingen of (PDVn) bevatten partiële afgeleiden naar meer dan één onafhankelijke veranderlijke.

De onafhankelijke veranderlijken zijn typisch één of meedere ruimtelijke veranderlijken en eventueel ook de tijd.

Hoe groter het aantal dimensies, hoe ingewikkelder de formulering van het probleem: er bestaan

- pure beginwaardenproblemen,
- pure randwaardenproblemen
- of zelfs een mix van beide.

De vergelijking en de randwaarden kunnen gedefinieerd zijn over een regelmatig of een onregelmatig domein.

Partiële differentiaalvergelijkingen

Partiële differentiaalvergelijkingen of (PDVn) bevatten partiële afgeleiden naar meer dan één onafhankelijke veranderlijke.

De onafhankelijke veranderlijken zijn typisch één of meedere ruimtelijke veranderlijken en eventueel ook de tijd.

Hoe groter het aantal dimensies, hoe ingewikkelder de formulering van het probleem: er bestaan

- pure beginwaardenproblemen,
- pure randwaardenproblemen
- of zelfs een mix van beide.

De vergelijking en de randwaarden kunnen gedefinieerd zijn over een regelmatig of een onregelmatig domein.

Partiële differentiaalvergelijkingen

Voor de eenvoud zullen we PDVn beschouwen waarbij er maar één vergelijking is (en geen stelsel van vergelijkingen) met slechts twee onafhankelijke veranderlijken:

(i) hetzij twee ruimteveranderlijken, aangeduid met x en y

(ii) hetzij één ruimteveranderlijke x en de tijdsveranderlijke t

De partiële afgeleiden worden aangeduid met subscripts, bvb.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Partiële differentiaalvergelijkingen

Voor de eenvoud zullen we PDVn beschouwen waarbij er maar één vergelijking is (en geen stelsel van vergelijkingen) met slechts twee onafhankelijke veranderlijken:

(i) hetzij twee ruimteveranderlijken, aangeduid met x en y

(ii) hetzij één ruimteveranderlijke x en de tijdsveranderlijke t

De partiële afgeleiden worden aangeduid met subscripts, bvb.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Voorbeeld: de advectievergelijking

De advectievergelijking luidt

$$u_t = -c\, u_x$$

waarbij c een van nul verschillende constant is.

Een unieke oplossing wordt verkregen door de beginvoorwaarde (BV)

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

waarbij $u_0(x)$ een gegeven functie is die gedefinieerd is over $\mathbb{R}$.

We zoeken een oplossing $u(t,x)$ voor $t \geq 0$ en $x \in \mathbb{R}$.

Men verifieert, gebruik makend van de kettingregel, dat $u(t,x) = u_0(x - c\,t)$.

Voorbeeld: de advectievergelijking

De advectievergelijking luidt

$$u_t = -c\, u_x$$

waarbij c een van nul verschillende constant is.

Een unieke oplossing wordt verkregen door de beginvoorwaarde (BV)

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

waarbij $u_0(x)$ een gegeven functie is die gedefinieerd is over $\mathbb{R}$.

We zoeken een oplossing $u(t,x)$ voor $t \geq 0$ en $x \in \mathbb{R}$.

Men verifieert, gebruik makend van de kettingregel, dat $u(t,x) = u_0(x - c\,t)$.

Voorbeeld: de advectievergelijking

De advectievergelijking luidt

$$u_t = -c\, u_x$$

waarbij c een van nul verschillende constant is.

Een unieke oplossing wordt verkregen door de beginvoorwaarde (BV)

$$u(0, x) = u_0(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

waarbij $u_0(x)$ een gegeven functie is die gedefinieerd is over $\mathbb{R}$.

We zoeken een oplossing $u(t, x)$ voor $t \geq 0$ en $x \in \mathbb{R}$.

Men verifieert, gebruik makend van de kettingregel, dat $u(t, x) = u_0(x - c\, t)$.

Voorbeeld: de advectievergelijking

De advectievergelijking luidt

$$u_t = -c\, u_x$$

waarbij c een van nul verschillende constant is.

Een unieke oplossing wordt verkregen door de beginvoorwaarde (BV)

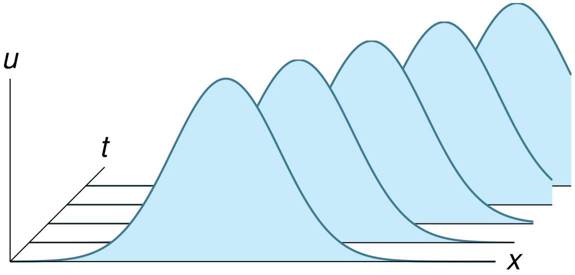
$$u(0, x) = u_0(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

waarbij $u_0(x)$ een gegeven functie is die gedefinieerd is over $\mathbb{R}$.

We zoeken een oplossing $u(t, x)$ voor $t \geq 0$ en $x \in \mathbb{R}$.

Men verifieert, gebruik makend van de kettingregel, dat $u(t, x) = u_0(x - c\, t)$.

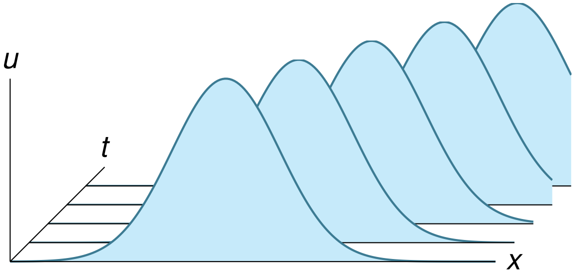
Voorbeeld: de advectievergelijking



$$u(t,x) = u_0(x - c\,t)$$

De initiële oplossing verschuift over een afstand $c\,t$ naar rechts als $c > 0$ en naar links als $c < 0$

Voorbeeld: de advectievergelijking



$$u(t,x) = u_0(x - c\,t)$$

De initiële oplossing verschuift over een afstand $c\,t$ naar rechts als $c > 0$ en naar links als $c < 0$

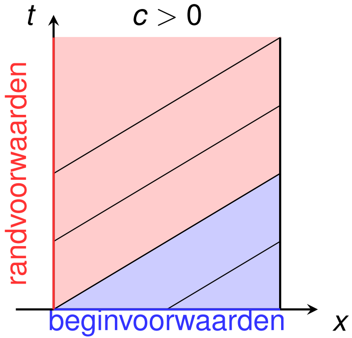
Karakteristieken

Karakteristieken van een PDV zijn de niveaulijnen van de oplossing: het zijn lijnen waar de oplossing een constante waarde heeft.

De karakteristieken bepalen welke randvoorwaarden (RVn) opgelegd dienen te worden om goed gesteld te zijn.

Karakteristieken

Voor de advectievergelijking zijn de niveaulijnen rechten
$x - c\,t = x_0$, of $t = \frac{1}{c}\,(x - x_0)$.



Hoe PDVn oplossen?

Sommige PDVn kunnen exact opgelost worden, sommige oplossingen kunnen alleen via numerieke methoden benaderd worden.

Een vaak toegepaste techniek is scheiding van veranderlijken.

Hoe PDVn oplossen?

Sommige PDVn kunnen exact opgelost worden, sommige oplossingen kunnen alleen via numerieke methoden benaderd worden.

Een vaak toegepaste techniek is scheiding van veranderlijken.

Classificatie

De orde van een PDV is de hoogste-orde partiële orde afgeleide in de PDV.

- De advectie-vergelijking is dus van eerste orde.
- Enkele voorbeelden van typische tweede-orde PDVn zijn
  (i) de warmtevergelijking $u_t = u_{xx}$
  (ii) de golfvergelijking $u_{tt} = u_{xx}$
  (iii) de Laplace-vergelijking $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Classificatie

De orde van een PDV is de hoogste-orde partiële orde afgeleide in de PDV.

- De advectie-vergelijking is dus van eerste orde.
- Enkele voorbeelden van typische tweede-orde PDVn zijn
  (i) de warmtevergelijking $u_t = u_{xx}$
  (ii) de golfvergelijking $u_{tt} = u_{xx}$
  (iii) de Laplace-vergelijking $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Classificatie

De orde van een PDV is de hoogste-orde partiële orde afgeleide in de PDV.

- De advectie-vergelijking is dus van eerste orde.
- Enkele voorbeelden van typische tweede-orde PDVn zijn
  (i) de warmtevergelijking $u_t = u_{xx}$
  (ii) de golfvergelijking $u_{tt} = u_{xx}$
  (iii) de Laplace-vergelijking $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Classificatie

De orde van een PDV is de hoogste-orde partiële orde afgeleide in de PDV.

- De advectie-vergelijking is dus van eerste orde.
- Enkele voorbeelden van typische tweede-orde PDVn zijn
  (i) de warmtevergelijking $u_t = u_{xx}$
  (ii) de golfvergelijking $u_{tt} = u_{xx}$
  (iii) de Laplace-vergelijking $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Classificatie

De orde van een PDV is de hoogste-orde partiële orde afgeleide in de PDV.

- De advectie-vergelijking is dus van eerste orde.
- Enkele voorbeelden van typische tweede-orde PDVn zijn
  - (i) de warmtevergelijking $u_t = u_{xx}$
  - (ii) de golfvergelijking $u_{tt} = u_{xx}$
  - (iii) de Laplace-vergelijking $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Classificatie

De orde van een PDV is de hoogste-orde partiële orde afgeleide in de PDV.

- De advectie-vergelijking is dus van eerste orde.
- Enkele voorbeelden van typische tweede-orde PDVn zijn
  - (i) de warmtevergelijking $u_t = u_{xx}$
  - (ii) de golfvergelijking $u_{tt} = u_{xx}$
  - (iii) de Laplace-vergelijking $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Classificatie

Een lineaire PDV van tweede orde heeft de vorm

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u + g = 0$$

Deze vergelijkingen worden geclassificeerd volgens de waarde van de discriminant $b^2 - 4\,a\,c$

- $b^2 - 4\,a\,c > 0$: hyperbolisch (bvb. de golfvergelijking).
- $b^2 - 4\,a\,c = 0$: parabolisch (bvb. de warmtevergelijking).
- $b^2 - 4\,a\,c < 0$: elliptisch (bvb. de Laplace-vergelijking).

Classificatie

Een lineaire PDV van tweede orde heeft de vorm

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0$$

Deze vergelijkingen worden geclassificeerd volgens de waarde van de discriminant $b^2 - 4\,a\,c$

- $b^2 - 4\,a\,c > 0$: hyperbolisch (bvb. de golfvergelijking).
- $b^2 - 4\,a\,c = 0$: parabolisch (bvb. de warmtevergelijking).
- $b^2 - 4\,a\,c < 0$: elliptisch (bvb. de Laplace-vergelijking).

Classificatie

Een lineaire PDV van tweede orde heeft de vorm

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0$$

Deze vergelijkingen worden geclassificeerd volgens de waarde van de discriminant $b^2 - 4\,a\,c$

- $b^2 - 4\,a\,c > 0$: hyperbolisch (bvb. de golfvergelijking).
- $b^2 - 4\,a\,c = 0$: parabolisch (bvb. de warmtevergelijking).
- $b^2 - 4\,a\,c < 0$: elliptisch (bvb. de Laplace-vergelijking).

Classificatie

Een lineaire PDV van tweede orde heeft de vorm

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0$$

Deze vergelijkingen worden geclassificeerd volgens de waarde van de discriminant $b^2 - 4\,a\,c$

- $b^2 - 4\,a\,c > 0$: hyperbolisch (bvb. de golfvergelijking).
- $b^2 - 4\,a\,c = 0$: parabolisch (bvb. de warmtevergelijking).
- $b^2 - 4\,a\,c < 0$: elliptisch (bvb. de Laplace-vergelijking).

Classificatie

Een lineaire PDV van tweede orde heeft de vorm

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0$$

Deze vergelijkingen worden geclassificeerd volgens de waarde van de discriminant $b^2 - 4\,a\,c$

- $b^2 - 4\,a\,c > 0$: hyperbolisch (bvb. de golfvergelijking).
- $b^2 - 4\,a\,c = 0$: parabolisch (bvb. de warmtevergelijking).
- $b^2 - 4\,a\,c < 0$: elliptisch (bvb. de Laplace-vergelijking).

Classificatie

De classificatie van meer algemene PDVn is niet zo eenvoudig, maar ruwweg gesproken geldt

- hyperbolische PDVn beschrijven tijdsafhankelijke, conservatieve fysische processen (zoals convectie) die niet naar een evenwichtstoestand toegroeien,
- parabolische PDVn beschrijven tijdsafhankelijke, dissipatieve fysische processen (zoals diffusie) die wel naar een evenwichtstoestand toegroeien,
- elliptische PDVn beschrijven processen die reeds hun evenwichtstoestand hebben bereikt en zijn dus tijds-onafhankelijk.

Classificatie

De classificatie van meer algemene PDVn is niet zo eenvoudig, maar ruwweg gesproken geldt

- hyperbolische PDVn beschrijven tijdsafhankelijke, conservatieve fysische processen (zoals convectie) die niet naar een evenwichtstoestand toegroeien,
- parabolische PDVn beschrijven tijdsafhankelijke, dissipatieve fysische processen (zoals diffusie) die wel naar een evenwichtstoestand toegroeien,
- elliptische PDVn beschrijven processen die reeds hun evenwichtstoestand hebben bereikt en zijn dus tijds-onafhankelijk.

Classificatie

De classificatie van meer algemene PDVn is niet zo eenvoudig, maar ruwweg gesproken geldt

- hyperbolische PDVn beschrijven tijdsafhankelijke, conservatieve fysische processen (zoals convectie) die niet naar een evenwichtstoestand toegroeien,
- parabolische PDVn beschrijven tijdsafhankelijke, dissipatieve fysische processen (zoals diffusie) die wel naar een evenwichtstoestand toegroeien,
- elliptische PDVn beschrijven processen die reeds hun evenwichtstoestand hebben bereikt en zijn dus tijds-onafhankelijk.

Classificatie

De classificatie van meer algemene PDVn is niet zo eenvoudig, maar ruwweg gesproken geldt

- hyperbolische PDVn beschrijven tijdsafhankelijke, conservatieve fysische processen (zoals convectie) die niet naar een evenwichtstoestand toegroeien,
- parabolische PDVn beschrijven tijdsafhankelijke, dissipatieve fysische processen (zoals diffusie) die wel naar een evenwichtstoestand toegroeien,
- elliptische PDVn beschrijven processen die reeds hun evenwichtstoestand hebben bereikt en zijn dus tijds-onafhankelijk.

Randvoorwaarden

Ook bij PDV dienen er ook voorwaarden opgelegd te worden aan de differentiaalvergelijking om een unieke oplossing te bekomen. De voorwaarden kunnen op verschillende manieren gespecifieerd worden langs de rand

- Dirichlet: u is gegeven,
- Neumann: u_x of u_y is gegeven,
- gemengd: een combinatie van beide soorten is gegeven.

Randvoorwaarden

Ook bij PDV dienen er ook voorwaarden opgelegd te worden aan de differentiaalvergelijking om een unieke oplossing te bekomen. De voorwaarden kunnen op verschillende manieren gespecifieerd worden langs de rand

- Dirichlet: u is gegeven,
- Neumann: u_x of u_y is gegeven,
- gemengd: een combinatie van beide soorten is gegeven.

Randvoorwaarden

Ook bij PDV dienen er ook voorwaarden opgelegd te worden aan de differentiaalvergelijking om een unieke oplossing te bekomen. De voorwaarden kunnen op verschillende manieren gespecifieerd worden langs de rand

- Dirichlet: u is gegeven,
- Neumann: u_x of u_y is gegeven,
- gemengd: een combinatie van beide soorten is gegeven.

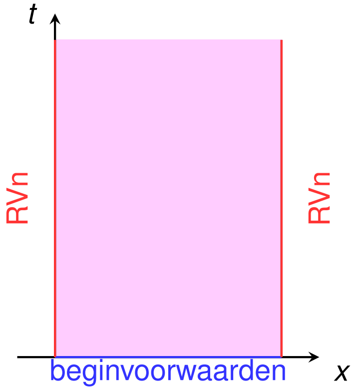
Randvoorwaarden

Ook bij PDV dienen er ook voorwaarden opgelegd te worden aan de differentiaalvergelijking om een unieke oplossing te bekomen. De voorwaarden kunnen op verschillende manieren gespecifieerd worden langs de rand

- Dirichlet: u is gegeven,
- Neumann: u_x of u_y is gegeven,
- gemengd: een combinatie van beide soorten is gegeven.

Tijdsafhankelijke problemen

Tijdsafhankelijke problemen hebben doorgaans zowel begin- als randwaarden nodig



Randvoorwaarden bij tijdsafhankelijke problemen

Voor de warmtevergelijking

$$u_t = c\,u_{xx} \qquad 0 \le x \le 1 \qquad t > 0$$

kan als beginwaarde gegeven worden

$$u(0,x) = u_0(x)$$

en als randvoorwaarden

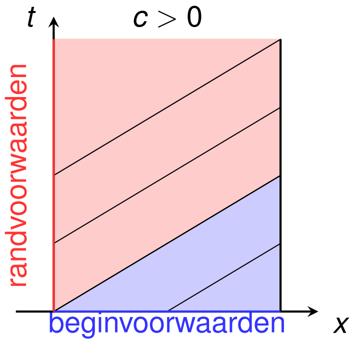
$$u(t,0) = 0 \qquad u(t,1) = 0$$

Randvoorwaarden bij tijdsafhankelijke problemen

Voor de advectievergelijking is er een beginwaarde nodig en een randvoorwaarde in hetzij $x = 0$ (als $c > 0$), hetzij $x = 1$ (als $c < 0$).

Randvoorwaarden bij tijdsafhankelijke problemen

Voor de advectievergelijking is er een beginwaarde nodig en een randvoorwaarde in hetzij $x = 0$ (als $c > 0$), hetzij $x = 1$ (als $c < 0$).



Tijdsonafhankelijke problemen

We nemen als voorbeeld de Helmholtz-vergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = f(x, y)$$

Enkele speciale gevallen zijn

- Poisson-vergelijking: $\lambda = 0$
- Laplace-vergelijking: $\lambda = 0$ en $f = 0$

Het domein is hierbij typisch een gesloten gebied (bvb. een vierkant), waarbij over de ganse rand voorwaarden opgelegd zijn.

Tijdsonafhankelijke problemen

We nemen als voorbeeld de Helmholtz-vergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = f(x, y)$$

Enkele speciale gevallen zijn

- Poisson-vergelijking: $\lambda = 0$
- Laplace-vergelijking: $\lambda = 0$ en $f = 0$

Het domein is hierbij typisch een gesloten gebied (bvb. een vierkant), waarbij over de ganse rand voorwaarden opgelegd zijn.

Tijdsonafhankelijke problemen

We nemen als voorbeeld de Helmholtz-vergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = f(x, y)$$

Enkele speciale gevallen zijn

- Poisson-vergelijking: $\lambda = 0$
- Laplace-vergelijking: $\lambda = 0$ en $f = 0$

Het domein is hierbij typisch een gesloten gebied (bvb. een vierkant), waarbij over de ganse rand voorwaarden opgelegd zijn.

Tijdsonafhankelijke problemen

We nemen als voorbeeld de Helmholtz-vergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = f(x, y)$$

Enkele speciale gevallen zijn

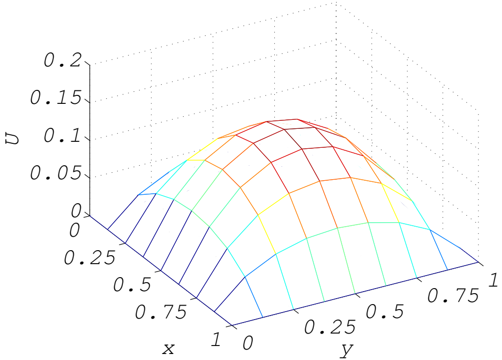
- Poisson-vergelijking: $\lambda = 0$
- Laplace-vergelijking: $\lambda = 0$ en $f = 0$

Het domein is hierbij typisch een gesloten gebied (bvb. een vierkant), waarbij over de ganse rand voorwaarden opgelegd zijn.

Voorbeeld: Poisson-vergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} + 2 = 0$$

over $[0,1] \times [0,1]$ waarbij $u = 0$ op de rand



Voorbeeld: Poisson-vergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} + 2 = 0$$

over $[0,1] \times [0,1]$ waarbij $u = 0$ op de rand