G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- Beschouw N deeltjes waarop externe en interne krachten inwerken (de toegepaste kracht). De deeltjes zijn onderworpen aan n_b holonome tijdsonafhankelijke bindingen,

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, .., \boldsymbol{r}_N) &= 0 \\ f_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, .., \boldsymbol{r}_N) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{n_b}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, .., \boldsymbol{r}_N) &= 0 \end{aligned} \tag{63}$$

wat we beknopt noteren als

$$f_n(\boldsymbol{r}_i) = 0 \tag{64}$$

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- Een door de bindingen toegelaten pad $\{\boldsymbol{r}_i(t)\}$ van de deeltjes voldoet dus aan

$$f_n(\boldsymbol{r}_i(t)) = 0 \tag{65}$$

en door de tijdsafgeleide te nemen vinden we voorwaarden waaraan toegelaten snelheden moeten voldoen

$$\sum_i \boldsymbol{\nabla}_i f_n(\boldsymbol{r}_i(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i(t) = 0 \tag{66}$$

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- Als gevolg van de bindingen ondervindt elk deeltje een reactiekracht $\boldsymbol{F}_i^{(r)}$. De totale kracht die op deeltje *i* werkt is dus de som van een toegepaste kracht en een reactiekracht,

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{(a)} + \boldsymbol{F}_i^{(r)} \tag{67}$$

- Principe van d'Alembert (voor holonome tijdsonafhankelijke systemen): de totale arbeid verricht door de de reactiekrachten gedurende een toegelaten beweging is nul,

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^{(r)} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{68}$$

- Voorbeeld van 1 deeltje met 1 binding $f(\boldsymbol{r}) = 0$.

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- Voorbeeld van 1 deeltje met 1 binding $f(\boldsymbol{r}) = 0$. Dit is de vergelijking van een oppervlak in de driedimensionale ruimte. In een punt $\boldsymbol{r}$ van het oppervlak wordt de richting van de normaal op het oppervlak gegeven door $\nabla f(\boldsymbol{r})$. Op elk ogenblik t moet $f(\boldsymbol{r}(t)) = 0$. De tijdsafgeleide van de bindingsvoorwaarde

$$\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{r}(t)) = (\nabla f(\boldsymbol{r}(t))) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t) = 0 \tag{69}$$

drukt een voorwaarde uit waaraan de snelheid $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ moet voldoen, nl. ze moet orthogonaal staan op de richting van de normaal, en dus in het raakvlak aan het oppervlak liggen.
- Maar de reactiekracht $\boldsymbol{F}^{(r)}$ op het deeltje dat op het oppervlak moet bewegen is altijd gericht volgens de normaal. Bijgevolg is gedurende de beweging $\boldsymbol{F}^{(r)} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = 0$, en de reactiekracht levert geen arbeid.

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- Het principe van d'Alembert in vgl.(68) biedt de mogelijkheid om de reactiekrachten te elimineren uit de beschrijving van de beweging.
- 2e wet van Newton

$$\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{F}_i^{(a)} + \boldsymbol{F}_i^{(r)} - \dot{\boldsymbol{p}}_i = 0 \tag{70}$$

- Scalair vermenigvuldigen met $\dot{\boldsymbol{r}}_i$, sommatie over i en gebruik maken van vgl.(68)

$$\sum_i (\boldsymbol{F}_i^{(a)} + \boldsymbol{F}_i^{(r)} - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i (\boldsymbol{F}_i^{(a)} - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{71}$$

Reactiekrachten treden niet meer op. Vanaf nu laten we de index (a) die duidt op de toegepaste kracht weg, $\boldsymbol{F}_i^{(a)} \rightarrow \boldsymbol{F}_i$.

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- Er geldt dus dat

$$\sum_i (\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{72}$$

  voor alle toegelaten bewegingen $\dot{\boldsymbol{r}}_i$. Door de bindingen zijn de $\boldsymbol{r}_i$, en dus ook de $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ niet onafhankelijk. We moeten eerst overgaan naar onafhankelijke veralgemeende coördinaten zoals in vgl.(62).
- Definiëer $n_q = 3N - n_b$ veralgemeende coördinaten zo dat

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &\equiv \boldsymbol{r}_1(q_1, q_2, .., q_{n_q}) \\
\boldsymbol{r}_2 &\equiv \boldsymbol{r}_2(q_1, q_2, .., q_{n_q}) \\
&\vdots \\
\boldsymbol{r}_N &\equiv \boldsymbol{r}_N(q_1, q_2, .., q_{n_q})
\end{aligned} \tag{73}$$

  automatisch voldoet aan de bindingen in vgl.(64) voor alle waarden van $(q_1, q_2, .., q_{n_q})$.

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- De overgang van Cartesische naar veralgemeende coördinaten in vgl.(254) wordt beknopter genoteerd als

$$\boldsymbol{r}_i \equiv \boldsymbol{r}_i(q_k) \tag{74}$$

- Geven we de q_k een tijdsafhankelijkheid, dan beschrijven de Cartesische coördinaten een pad

$$\boldsymbol{r}_i(t) = \boldsymbol{r}_i(q_k(t)) \tag{75}$$

- Het verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden is dan

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \tag{76}$$

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- Substitueer vgl.(76) in vgl.(72)

$$\sum_k \dot{q}_k \left\{ \sum_i (\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \right\} = 0 \tag{77}$$

- Veralgemeende kracht Q_k

$$Q_k = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \tag{78}$$

- Kan opgesteld worden via uitdrukking voor krachtwet in Cartesische coördinaten en het verband tussen Cartesische en veralgemeende coördinaten.
- Q_k niet noodzakelijk dimensie van kracht, wel moet product $Q_k q_k$ dimensie van energie hebben voor elke veralgemeende coördinaat q_k.

- Uitwerking $\dot{\boldsymbol{p}}_i$ term in vgl.(77)?

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) \tag{79}$$

- Uit vgl.(76) volgt:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \tag{80}$$

- Bijgevolg is

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right) \tag{81}$$

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- Uit vgl.(76) volgt eveneens:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\ell} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\ell \partial q_k} \dot{q}_k \tag{82}$$

- De tijdsafgeleide rechts in vgl.(79) kan uitgewerkt worden als

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_\ell \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\ell \partial q_k} \dot{q}_\ell \tag{83}$$

- We zien dus via vgl.(82) dat

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \tag{84}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right) = \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_i^2\right) \tag{85}$$

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- Finaal wordt dan vgl.(79), m.b.v. vgl.(81) en vgl.(85),

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right) \tag{86}$$

- Met $\dot{\boldsymbol{p}}_i = m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i$ kan dan de $\dot{\boldsymbol{p}}_i$ term in vgl.(77) herschreven worden als

$$\sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \tag{87}$$

  in termen van de kinetische energie $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2$ (die via de transformatieformules in vgl.(76) nu een functie is van de veralgemeende coördinaten en de veralgemeende snelheden).

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- Vgl.(77) betekent dat voor arbitraire veralgemeende snelheden $\dot{q}_k(t)$ moet gelden

$$\sum_k \dot{q}_k \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right\} = 0 \tag{88}$$

- Vermits de q_k onafhankelijke coördinaten voorstellen, kan dit enkel als

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \tag{89}$$

voor elke k afzonderlijk. Dit zijn de Lagrange vergelijkingen in 1e vorm, geldig voor alle types krachten.

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- Voor een systeem met conservatieve krachten is $\boldsymbol{F}_i = -\boldsymbol{\nabla}_i V$ met de potentiaal $V(\boldsymbol{r}_1, .., \boldsymbol{r}_N)$ enkel functie van de positie van de deeltjes.
- Via de transformatie naar veralgemeende coördinaten volgt dat de potentiaal enkel van de veralgemeende coördinaten afhangt, $V(\boldsymbol{r}_1(q_k), .., \boldsymbol{r}_N(q_k))$
- De afgeleide van de potentiaal naar een veralgemeende coördinaat volgt uit de kettingregel

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_i (\boldsymbol{\nabla}_i V) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \tag{90}$$

- De veralgemeende kracht in vgl.(78) is dus onmiddellijk

$$Q_k = -\sum_i (\boldsymbol{\nabla}_i V) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{91}$$

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

- De potentiaal hangt niet van de veralgemeende snelheden af, zodat we kunnen schrijven

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{92}$$

- Combinatie van vgl.(91) en vgl.(92) met de 1e vorm van de Lagrangevergelijkingen (93) levert

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{93}$$

  Dit is de 2e vorm van de Lagrangevergelijkingen, ook wel *de Lagrangevergelijkingen* genoemd. De functie $L = T - V$ wordt de Lagrangiaan van het systeem genoemd.

G1.4 : Principe van d'Alembert en Lagrange vergelijkingen

Opmerkingen

- Er zijn $n_q = 3N - n_b$ Lagrangevergelijkingen, evenveel als er onafhankelijke vrijheidsgraden zijn in het systeem.
- De Lagrangevergelijkingen zijn equivalent met de bewegingsvergelijkingen van Newton, waarbij door over te gaan naar veralgemeende coördinaten onmiddellijk rekening wordt gehouden met eventuele bindingen.
- Een ander voordeel van de Lagrangeformulering is dat er enkel gewerkt wordt met scalaire functies (kinetische energie, potentiaal, Lagrangiaan) i.p.v. met vectorgrootheden zoals de krachten en versnellingen van de deeltjes.
- De vorm van de Lagrangevergelijkingen is algemener dan hier afgeleid, bvb. in geval van holonome bindingen met expliciete tijdsafhankelijkheid worden dezelfde vergelijkingen gevonden (zie boek, niet te kennen).

G1.6: Eenvoudige toepassingen van het Lagrange formalisme

- Beschrijving van 1 deeltje in 3D ruimte met Cartesische coördinaten.
- Beschrijving van 1 deeltje in 2D vlak met poolcoördinaten.
- Machine van Atwood.
- Kraaltje dat kan glijden over een roterende staaf.

G2.1: Principe van Hamilton

- We hebben een systeem met N deeltjes, beschreven aan de hand van $3N$ Cartesische coördinaten, eventueel onderworpen aan n_b holonome bindingen die het aantal vrijheidsgraden reduceren tot $n_q = 3N - n_b$. In elk geval kan de toestand van het systeem beschreven worden met n_q veralgemeende coördinaten $(q_1, .., q_{n_q})$, een punt in een n_q-dimensionale ruimte die de *configuratieruimte* wordt genoemd.
- Onder invloed van de krachten evolueren de veralgemeende coördinaten in de tijd, m.a.w. het punt in de configuratieruimte $(q_1(t), .., q_{n_q}(t))$ beschrijft een *baan* of een *pad*, $\{q_k(t)\}$ in de configuratieruimte. Maar welk pad wordt gevolgd tussen een beginconfiguratie op t_1, $\{q_k(t_1)\}$, en een eindconfiguratie op t_2, $\{q_k(t_2)\}$?

G2.1: Principe van Hamilton

- De theoretische discussie blijft beperkt tot systemen met holonome bindingen en conservatieve toegepaste krachten (dit zijn de ”gegeven” krachten die geen reactiekrachten zijn op bindingen). Er zijn veel tussenvormen en speciale gevallen mogelijk, maar een behandeling is niet zinvol in een basis cursus (en kan eventueel worden uitgespit in latere jaren).
- We tonen aan dat het systeem evolueert tussen t_1 en t_2 zó, dat de actie-integraal

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{94}$$

met L de Lagrangiaan, extremaal wordt voor het fysisch gerealiseerde pad. Dit vergt enige uitleg.

G2.2: Variatie analyse

- Bekijk een (gladde) functie $y(x)$ in het 2D xy vlak. De enige voorwaarde voor $y(x)$ is dat ze een beginpunt (x_1, y_1) en een eindpunt (x_2, y_2) verbindt, m.a.w.

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{en} \quad y(x_2) = y_2 \tag{95}$$

  Verder zal met $\dot{y}(x)$ de afgeleide functie $\frac{dy}{dx}(x)$ bedoeld worden.
- Er zijn uiteraard veel dergelijke paden $y(x)$ tussen (x_1, y_1) en (x_2, y_2) mogelijk.
- Gegeven een functie van drie variabelen $f(y, \dot{y}, x)$ dan kan voor elk pad $y(x)$ de volgende integraal berekend worden:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y(x), \dot{y}(x), x) \tag{96}$$

  De waarde van de integraal hangt duidelijk van het pad $y(x)$ af. De vraag is dan voor welk pad de integraal *stationair* wordt.

G2.2: Variatie analyse

- De integraal J is stationair voor een pad $y(x)$ als voor een kleine vervorming van het pad, de waarde van de integraal niet verandert (tot op 1e orde in de kleine vervorming). De integraal is dan extremaal (minimaal of maximaal). Mathematisch kan dit als volgt worden uitgedrukt:
- Stel dat $y(x)$ het pad is waarvoor J stationair wordt. Bekijk een familie van paden $y(x, \alpha)$, geparametrizeerd aan de hand van een parameter α:

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x) \tag{97}$$

  Hierbij is $\eta(x)$ een arbitraire functie, behalve dat

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \tag{98}$$

  zodat elk pad $y(x, \alpha)$ de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) verbindt.
- Het is duidelijk dat een pad $y(x, \alpha)$, voor voldoende kleine α, in de buurt ligt van $y(x)$, en ermee samenvalt als $\alpha = 0$.

G2.2: Variatie analyse

- De integraal J kan geëvalueerd worden voor alle paden $y(x, \alpha)$, en wordt zo een functie van α,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x) \tag{99}$$

- Het stationair zijn van de integraal voor $y(x)$, m.a.w. voor $\alpha = 0$, vereist dan dat

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 \tag{100}$$

- De afgeleide naar α kan door het integratieteken geschoven worden,

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{d}{d\alpha} f(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x) \tag{101}$$

en werkt in op de α-afhankelijkheid in het 1e argument $y(x, \alpha)$ en het 2e argument $\dot{y}(x, \alpha)$ van f.

- Kettingregel toepassen

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x) \right] \frac{d}{d\alpha} y(x,\alpha) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x) \right] \frac{d}{d\alpha} \dot{y}(x,\alpha) \right\} \qquad (102)\end{aligned}$$

- Gelet op de definitie in vgl.(97), is

$$\frac{d}{d\alpha} y(x,\alpha) = \eta(x) \text{ en } \frac{d}{d\alpha} \dot{y}(x,\alpha) = \dot{\eta}(x) \qquad (103)$$

Tevens moet de afgeleide $\frac{dJ}{d\alpha}$ geëvalueerd worden voor $\alpha = 0$ zodat, in het argument van $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$, $y(x, \alpha = 0) = y(x)$ en $\dot{y}(x, \alpha = 0) = \dot{y}(x)$ kan gesteld worden.

- Hiermee wordt

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y(x), \dot{y}(x), x)\right] \eta(x) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x), \dot{y}(x), x)\right] \dot{\eta}(x) \right\} \tag{104}$$

- In de tweede term passen we partiële afleiding toe op het product $h(x)\dot{\eta}(x)$, waarbij

$$h(x) = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x), \dot{y}(x), x) \tag{105}$$

Er geldt

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, h(x)\frac{d\eta}{dx}(x) = h(x_2)\eta(x_2) - h(x_1)\eta(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} dx\, \eta(x)\frac{dh}{dx}(x) \tag{106}$$

Gelet op vgl.(98) verdwijnen de eerste twee termen in (106).

G2.2: Variatie analyse

- Finaal kan vgl.(104) herschreven worden als

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \eta(x) \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y(x), \dot{y}(x), x)\right] - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x), \dot{y}(x), x)\right]\right\} \tag{107}$$

- De voorwaarde voor stationariteit was dat de integraal in vgl.(107) nul is, en dit moet gelden voor een *arbitraire* functie $\eta(x)$ (die voldoet aan vgl.(98). Dit kan enkel als de factor tussen $\{\}$ in het integrandum verdwijnt over het integratie-interval.
- We zien dus dat het pad $y(x)$ de integraal in vgl.(96) stationair maakt, als $y(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, \dot{y}, x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y, \dot{y}, x)\right) \tag{108}$$

G2.2: Variatie analyse

- De differentiaalvergelijking (108) wordt de *Euler-Lagrange* vergelijking genoemd, geassociëerd met het variationeel probleem ”vind het pad dat de integraal in vgl.(96) extremaal maakt”.
- Het is duidelijk dat de Lagrangevergelijkingen dezelfde structuur hebben, en dus ook kunnen afgeleid worden puur op basis van een variationeel principe.
- Als toepassing bekijken we een eenvoudig voorbeeld (waar we vooraf de oplossing weten), nl. het kortste pad tussen twee punten.
- Heel krachtige techniek, bvb. het brachistochroon probleem. Misschien in een oefeningenles.

G2.2: Variatie analyse

- De infinitesimale afstand langs een curve $y(x)$ wordt gegeven door

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = dx\sqrt{1 + (\dot{y})^2} \quad (109)$$

- De afstand van het pad $y(x)$ tussen (x_1, y_1) en (x_2, y_2) wordt dan

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx\,\sqrt{1 + (\dot{y})^2} \quad (110)$$

- Dit is een probleem van het type in vgl.(96), met $f(y, \dot{y}, x) = \sqrt{1 + (\dot{y})^2}$. We hebben in dit geval

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \;\text{ en }\; \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} \quad (111)$$

- De corresponderende Euler-Lagrange vergelijking wordt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+(\dot{y})^2}}\right) = 0 \tag{112}$$

- Bijgevolg moet $\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+(\dot{y})^2}}\right)$ constant zijn, wat impliceert dat $\dot{y}$ constant is, dus $y(x) = ax + b$ is lineair.
- Uitdrukken dat $y(x_1) = y_1$ en $y(x_2) = y_2$ bepaalt a en b, en de oplossing is het lijnstuk door de twee punten,

$$y(x) = \frac{y_2(x - x_1) + y_1(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \tag{113}$$

G2.3: Lagrange vergelijking uit het principe van Hamilton

- De uitbreiding van het probleem in vgl.(96) tot meerdimensionale functies verloopt analoog. I.p.v. $y(x)$ hebben we nu een $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ functie $(y_1(x), y_2(x), .., y_n(x))$ als pad dat een beginconfiguratie $(y_1(x_1), y_2(x_1), .., y_n(x_1))$ voor $x = x_1$ verbindt met een eindconfiguratie $(y_1(x_2), y_2(x_2), .., y_n(x_2))$ voor $x = x_2$.
- We vragen ons opnieuw af onder welke voorwaarden het pad $(y_1(x), y_2(x), .., y_n(x))$ een stationaire waarde oplevert voor een integraal van het type

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y_1(x), .., y_n(x), \dot{y}_1(x), .., \dot{y}_n(x), x) \tag{114}$$

G2.3: Lagrange vergelijking uit het principe van Hamilton

- Voer terug een familie paden in rond $(y_1(x), y_2(x), .., y_n(x))$ aan de hand van de parametrisatie

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x) + \alpha\eta_i(x), \ \text{ met } \ i = 1, 2, ..n \tag{115}$$

  De $\eta_i(x)$ zijn arbitraire functies, behalve dat $\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$.

- Evaluatie van de integraal met het pad $(y_1(x, \alpha), y_2(x, \alpha), .., y_n(x, \alpha))$ levert een functie van α

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y_1(x, \alpha), .., y_n(x, \alpha), \dot{y}_1(x, \alpha), .., \dot{y}_n(x, \alpha), x) \tag{116}$$

G2.3: Lagrange vergelijking uit het principe van Hamilton

- Stationariteit van (114) voor het pad $(y_1(x), y_2(x), .., y_n(x))$ betekent dat

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \dot{\eta}_i \right)
\end{aligned}
\qquad (117)
$$

- De termen in het integrandum met $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \dot{\eta}_i$ worden weer omgezet met partiële integratie tot termen $-(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}) \eta_i$. De "stoktermen" verdwijnen wegens $\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$.

G2.3: Lagrange vergelijking uit het principe van Hamilton

- Hiermee wordt Vgl.(117)

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_i \eta_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \tag{118}$$

- Dit moet gelden voor arbitraire functies $\eta_i(x)$, zodat de factor die elke η_i vermenigvuldigt nul moet zijn. De corresponderende Euler-Lagrange vergelijkingen zijn dan

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \tag{119}$$

G2.3: Lagrange vergelijking uit het principe van Hamilton

- De actie-integraal in vgl.(94) kan nu op dezelfde manier geïnterpreteerd worden. Eisen dat

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) \tag{120}$$

stationair is voor het fysisch gerealiseerde pad $\{q_k(t)\}$ in de configuratieruimte, is equivalent met de corresponderende Euler-Lagrange vergelijkingen voor dit variationeel probleem,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \tag{121}$$

wat precies de voorheen afgeleide Lagrange bewegingsvergelijkingen zijn.