

Hoofdstuk 2

De elektromagnetische potentialen en statica

1 Elektromagnetische potentialen

De vergelijkingen van Maxwell zijn geschreven in functie van twee primaire velden, het elektrisch veld E en de magnetische inductie B , en twee afgeleide velden, de diëlektrische verplaatsing D en het magnetisch veld H . Men kan een equivalente beschrijving geven die steunt op potentialen in plaats van op velden, zodat de velden uit de potentialen kunnen bepaald worden.

1.1 Scalaire en vectorpotentiaal in elektromagnetisme

We gebruiken nu de Helmholtz decompositie (zie Bijlage A) om de fundamentele velden E en B te herschrijven. Op het eerste zicht kan men denken dat dit vereist om zowel een elektrische als een magnetische scalaire en vectorpotentiaal voor E en B afzonderlijk in te voeren. We kunnen echter gebruik maken van de bronvrije wetten van Maxwell om deze beschrijving aanzienlijk te vereenvoudigen en ervoor te zorgen dat deze twee vergelijkingen automatisch vervuld zijn.

Inderdaad, uit de magnetische wet van Gauss

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.1)$$

volgt dat B divergentievrij is en dus volgens de Helmholtz decompositie kan geschreven worden in termen van enkel een vectorpotentiaal A als

$$\boxed{B = \nabla \times A} \quad (2.2)$$

Uit de andere bronvrije Maxwellvergelijking, de wet van Faraday, volgt onmiddellijk dat

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Aangezien de combinatie $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ irrotatieel is, volgt uit de Helmholtzdecompositie dat deze kan geschreven worden in termen van enkel een scalaire potentiaal Φ , waarbij we $V = -\Phi$ invoeren om overeenstemming te bekomen met de experimenteel gekende elektrische potentiaal. Hieruit volgt dan dat

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V} \quad (2.4)$$

Merk op dat inderdaad $\mathbf{E} = -\nabla V$ indien de vectorpotentiaal \mathbf{A} niet van de tijd t afhangt, in overeenstemming met het gekende resultaat uit de electrostatica.

1.2 Vergelijkingen voor de potentialen

De elektromagnetische potentialen zijn zó ingevoerd dat twee van de Maxwellvergelijkingen identiek vervuld zijn. Uiteraard hebben we zo nog geen vergelijkingen waaraan de potentialen zelf moeten voldoen. Maar uit de twee overblijvende Maxwellvergelijkingen zullen we nu de vergelijkingen afleiden waaraan \mathbf{A} en V moeten voldoen, gegeven de normale constitutieve wetten (1.33).

Uit de vergelijking van Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (2.5)$$

volgt, gelet op de constitutieve wetten, dat

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{J}. \quad (2.6)$$

Herschrijven we dit in functie van de potentialen, dan komt er

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla V + \mu \mathbf{J}. \quad (2.7)$$

Rekening houdend met de vectoridentiteit

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.8)$$

krijgen we

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} \right)} \quad (2.9)$$

De wet van Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.10)$$

wordt met behulp van potentialen en constitutieve wetten herschreven als

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (2.11)$$

Tellen we bij beide leden $\epsilon\mu\partial^2 V/\partial t^2$ op, dan komt er, vermits $\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$,

$$\boxed{\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} \right)} \quad (2.12)$$

Op die manier bekomen we een stelsel gekoppelde partiële differentiaalvergelijkingen ter bepaling van de potentialen, bij *gegeven* ladings- en stroomdichtheid ρ en \mathbf{J} .

1.3 IJktransformaties

Alvorens verder te gaan, tonen we nu aan dat voor een gegeven elektromagnetisch veld, dit wil zeggen een gegeven stel veldvectoren \mathbf{E} en \mathbf{B} , de potentialen niet éénduidig bepaald zijn.

Onderstel dat er twee stellen elektromagnetische potentialen V, \mathbf{A} en V', \mathbf{A}' bestaan die aanleiding geven tot dezelfde elektrische en magnetische velden. Uiteindelijk zijn het de velden \mathbf{E} en \mathbf{B} die fysisch relevant zijn, en niet de “onderliggende” potentialen. Dan geldt uiteraard

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Uit de laatste gelijkheid volgt net zoals in de algemene Helmholtz decompositie dat tussen \mathbf{A} en \mathbf{A}' een betrekking bestaat van de gedaante

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \theta, \quad (2.14)$$

waarbij θ een arbitraire functie is van de ruimte- en tijdsveranderlijken. Houden we hiermee rekening in de uitdrukkingen voor \mathbf{E} , dan komt er

$$\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla V' + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla \theta). \quad (2.15)$$

Herschrijven we dit als

$$\nabla \left(V' - V + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.16)$$

dan is hieraan voldaan zodra

$$V' = V - \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (2.17)$$

In principe zou hierbij nog een arbitraire functie van de tijd kunnen worden opgeteld, maar die kan opgeslorpt worden in θ zonder aan de algemeenheid te schaden. Uit dit alles volgt dat het elektromagnetisch veld invariant is onder de volgende transformatie

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \theta, \\ V' &= V - \frac{\partial \theta}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

en men spreekt algemeen van een *ijktransformatie*.

In dergelijke ijktransformaties is θ een willekeurige functie en dit laat ons een zekere keuzevrijheid toe. Zo vragen we ons af of het ingewikkelde gekoppelde stelsel voor het berekenen van de potentialen niet kan ontkoppeld worden door een welgekozen θ . Uit

$$\begin{aligned}\nabla^2 A - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\mu J + \nabla \left(\nabla \cdot A + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} \right), \\ \nabla^2 V - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot A + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} \right),\end{aligned}\quad (2.19)$$

volgt dat ontkoppeling optreedt zodra

$$\boxed{\nabla \cdot A + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \quad (2.20)$$

Indien V en A aan deze voorwaarde voldoen, zeggen we dat ze aan de Lorenz-ijk¹ voldoen. Om de beperking te onderzoeken die hierdoor aan θ wordt opgelegd, schrijven we de betrekking neer voor een ander stel potentialen V', A' , namelijk

$$\nabla \cdot A' + \varepsilon\mu \frac{\partial V'}{\partial t} = 0, \quad (2.21)$$

en substitueren hierin de eerder gevonden verbanden. Er blijft dan over dat

$$\nabla \cdot \nabla \theta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \nabla^2 \theta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0. \quad (2.22)$$

In de Lorenz-ijk luiden de vergelijkingen waaraan de potentialen voldoen

$$\begin{aligned}\nabla^2 V - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon} & \text{of} & & \square V &= -\frac{\rho}{\varepsilon}, \\ \nabla^2 A - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\mu J & \text{of} & & \square A &= -\mu J.\end{aligned}\quad (2.23)$$

De differentiaaloperator

$$\boxed{\square = \nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \quad (2.24)$$

wordt de *d'Alembertiaan* genoemd. Het oplossen van deze vergelijkingen geeft aanleiding tot oplossingen van het oorspronkelijk stelsel van Maxwellvergelijkingen. Nochtans moeten we in principe steeds onderzoeken of de eventuele oplossingen die we op die manier via de elektromagnetische potentialen vinden, eveneens aan het oorspronkelijk stelsel van Maxwellvergelijkingen voldoen.

Bij het afsluiten van deze paragraaf benadrukken we dat andere geldige keuzes voor een ijktransformatie kunnen worden gemaakt. De Lorenz-ijk biedt het voordeel dat de vergelijkingen voor de potentialen te ontkoppelen zijn tot twee aparte d'Alembert vergelijkingen. De ene bepaalt de

¹Vaak ook de Landau ijk genoemd.

scalaire potentiaal V bij gegeven ladingsdichtheid ρ , de andere de vectorpotentiaal A bij gegeven stroomdichtheid J .

We hebben nu in feite gezien dat er gegeven een set potentialen (V, A) die aanleiding geven tot een bepaalde (E, B) veldconfiguratie, steeds een ganse verzameling van oplossingen kan gevonden worden, die verbonden zijn door ijktransformaties (2.18). Vermits (E, B) zelf oplossingen zijn van differentiaalvergelijkingen (zijnde de Maxwellvergelijkingen), hebben we dus gevonden dat deze klassen van oplossingen hebben, verbonden door ijktransformaties. We kunnen dit ook anders uitdrukken door te zeggen dat de Maxwellvergelijkingen, uitgedrukt in termen van V en A , invariant zijn onder een symmetrie, waarbij de symmetrie juist gegeven wordt door (2.18). We noemen deze symmetrie dan ook de *ijksymmetrie*.

Dit concept van ijksymmetrie is één van de hoekstenen geworden van de fysica. Zoals je misschien weet, zijn er 4 elementaire krachten in de natuur: de elektromagnetische, de zwakke, de sterke en de gravitationale wisselwerking. Elk van deze krachten kan beschreven worden aan de hand van het ijkprincipe². We verwijzen hiervoor graag naar latere opleidingsonderdelen zoals “Relativiteitstheorie” en “Kwantumveldentheorie”.

1.4 De potentiaal van Hertz

In de Lorenz-ijk zoeken we oplossingen van de vergelijkingen voor de potentialen die eveneens voldoen aan de Lorenz-ijk (2.20). Voor problemen die *expliciet tijdsafhankelijk* zijn, kunnen we een soort van *superpotentiaal* met vectorkarakter invoeren, waarin de scalaire- en vectorpotentiaal gemakkelijk kunnen uitgedrukt worden, de zogeheten *vectorpotentiaal van Hertz*.

We weten dat de Maxwellvergelijkingen een behoudswet voor de lading impliceren,

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.25)$$

Hieraan is voldaan als we een hulpvector N beschouwen, zó dat

$$\begin{aligned} J &= \varepsilon \frac{\partial N}{\partial t}, \\ \rho &= -\varepsilon \nabla \cdot N. \end{aligned} \quad (2.26)$$

De factor ε is alleen ingevoerd om later eenvoudige uitdrukkingen te bekomen. Analoog is aan de complementaire vergelijking van Lorenz (2.20) voldaan als we een vector π invoeren, de *vectorpotentiaal van Hertz* genoemd, zo dat

$$V = -\nabla \cdot \pi, \quad (2.27)$$

$$A = \varepsilon \mu \frac{\partial \pi}{\partial t}. \quad (2.28)$$

²In het geval van elektromagnetisme zijn de wetten van Maxwell eerst opgesteld vanuit een proefondervindelijke achtergrond, pas later werd de symmetrie gevonden. Bij het opstellen van de wiskundige beschrijving van bijvoorbeeld de sterke wisselwerking werd het ijkprincipe echter “actief” toegepast, m.a.w. vanuit de eis van een bepaalde ijksymmetrie werd de theorie opgebouwd.

Deze procedure is slechts zinvol indien uit de vergelijkingen voor de d'Alembertianen van de gewone potentialen V en A slechts één enkele vergelijking volgt voor de potentiaal van Hertz. Deze vergelijkingen kunnen herschreven worden als

$$\begin{aligned}\square V &= -\nabla \cdot (\square \pi) = -\frac{\rho}{\epsilon} = \nabla \cdot \mathbf{N} \\ \square A &= \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} (\square \pi) = -\mu \mathbf{J} = -\epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.29)$$

of nog als

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\square \pi + \mathbf{N}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\square \pi + \mathbf{N}) &= 0.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Deze vergelijkingen zijn zeker vervuld van zodra π voldoet aan

$$\boxed{\square \pi = -\mathbf{N}} \quad (2.31)$$

Het oplossen van het stelsel van Maxwellvergelijkingen is dan herleid tot het oplossen van deze vergelijking. Het rechterlid wordt de bronterm genoemd. De velden kunnen dan gemakkelijk uitgedrukt worden in functie van de vectorpotential van Hertz als

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} = \nabla(\nabla \cdot \pi) - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} \\ &= \nabla \times (\nabla \times \pi) + \nabla^2 \pi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = \nabla \times (\nabla \times \pi) + \square \pi \\ &= \nabla \times (\nabla \times \pi) - \mathbf{N}\end{aligned}\quad (2.32)$$

en

$$\mathbf{B} = \nabla \times A = \epsilon \mu \nabla \times \frac{\partial \pi}{\partial t}. \quad (2.33)$$

In het bijzonder is voor bronvrije media als diëlektrica ($\rho = 0$ en $\mathbf{J} = 0$) eenvoudig

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \nabla \times (\nabla \times \pi), \\ \mathbf{B} &= \epsilon \mu \nabla \times \frac{\partial \pi}{\partial t}.\end{aligned}\quad (2.34)$$

Dit zal onder meer gebruikt worden voor de behandeling van sferische golven op het einde van het volgend hoofdstuk.

2 Vertraagde potentialen en Greense functies

2.1 Probleemstelling

In hetgeen volgt zullen we steeds de Lorenz-ijk (2.20) aannemen, zodat de beide elektromagnetische potentialen voldoen aan een partiële differentiaalvergelijking van de vorm

$$\square \phi(\mathbf{r}, t) \equiv \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\mathbf{r}, t) = -f(\mathbf{r}, t), \quad (2.35)$$

waarbij c een constante is en $f(\mathbf{r}, t)$ een bekende functie voorstelt. Deze vergelijking wordt ook een vergelijking van d'Alembert genoemd, maar dan met een bekend rechterlid. De vraag rijst hoe we een vergelijking zoals (2.35) kunnen oplossen.

2.2 Greense functies

Voor de integratie van de d'Alembertvergelijking (2.35) zullen we een Greense functiemethode gebruiken. De Greense functie geassocieerd met de differentiaaloperator \square is een functie die afhankelijk is van twee onafhankelijke stellen ruimte- en tijdsveranderlijken (\mathbf{r}, t) en (\mathbf{r}', t') en die voldoet aan de vergelijking

$$\square G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \quad (2.36)$$

met hierin δ de Dirac-delta distributie, en waarbij bepaalde randvoorwaarden dienen opgelegd te worden, voortkomende uit fysische overwegingen. Voor de eenvoud zullen we ons beperken tot de oneindige ruimte zonder grensovervlak.

Onderstellen we even dat we de vergelijking (2.36) voor de Greense functie opgelost zouden hebben en $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ bepaald is, dan is een particuliere oplossing van de vergelijking van d'Alembert met bekend rechterlid gegeven door

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') d^3\mathbf{r}' dt' \quad (2.37)$$

Inderdaad, rechtstreekse substitutie hiervan levert

$$\begin{aligned} \square\phi(\mathbf{r}, t) &= \int [\square G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')] f(\mathbf{r}', t') d^3\mathbf{r}' dt' \\ &= - \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') f(\mathbf{r}', t') d^3\mathbf{r}' dt' = -f(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Op die manier laat de Greense functie G onmiddellijk toe om de oplossingen ϕ neer te schrijven bij gegeven f , zonder telkens weer een andere d'Alembertvergelijking te moeten oplossen. Op te merken valt dat we ons voorlopig beperken tot particuliere oplossingen van de volledige d'Alembertvergelijking met gegeven rechterlid f , om daar later de algemene oplossing van de homogene vergelijking aan toe te voegen.

Vermits we de oneindige ruimte en tijd beschouwen, ligt het voor de hand dat onze keuze van de oorsprong voor coördinaten of tijd geen fysische gevolgen kan hebben, zodat de functie G slechts kan afhangen van de argumenten $\mathbf{r}, \mathbf{r}', t$ en t' via de verschillen $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ en $t-t'$. Dit drukt juist de homogeneïteit uit van ruimte en tijd, wat hetzelfde is als eisen dat de fysica invariant blijft onder een willekeurige translatie in ruimte en/of tijd, of nog anders gesteld, dat de keuze van een oorsprong voor de plaatsbepaling en een begintijdstip voor de tijdsbepaling geen enkele invloed kan hebben op de uiteindelijke fysische resultaten. Vandaar dat we stellen

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad T = t - t' \quad (2.39)$$

zodat met evidente notaties

$$\nabla_r^2 = \nabla_R^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial T^2}, \quad \square_{r,t} = \square_{R,T}. \quad (2.40)$$

De Greense functie kan dan genoteerd worden als

$$G(r, t; r', t') \equiv G(r - r', t - t') \equiv G(R, T), \quad (2.41)$$

waarmee de definierende vergelijking (2.36) zich herleidt tot

$$\square G(R, T) = -\delta(R)\delta(T). \quad (2.42)$$

Voor alle punten en tijdstippen waarvoor $R \neq 0$ of $T \neq 0$, voldoet $G(R, T)$ aan de homogene vergelijking van d'Alembert

$$\square G(R, T) = 0. \quad (2.43)$$

Gezien de sferische symmetrie van dit probleem verwachten we dat de Greense functie enkel zal afhangen van de plaatscoördinaat R via de *afstand* $R = \|R\|$. We kunnen dus de Laplaciaan niet alleen uitdrukken in bolcoördinaten (R, θ, φ)

$$\nabla_R^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (2.44)$$

maar ons daarin zelfs beperken tot het afstandsafhankelijk deel

$$\nabla_R^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right). \quad (2.45)$$

Bij toepassen op een scalaire functie u is de laatste uitdrukking ook anders te berekenen,

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial u}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (uR), \quad (2.46)$$

wat nuttig zal blijken bij functies die een R -afhankelijkheid in de noemer vertonen. Inderdaad, vervangen we nu $G(R, T) = F(R, T)/R$ in de homogene vergelijking van d'Alembert

$$\square \left(\frac{F}{R} \right) = \left(\nabla_R^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \right) \left(\frac{F}{R} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (2.47)$$

dan blijkt dat F moet voldaan aan de eendimensionale golvergelijking en dus van de vorm is $F(R, T) = F_1(R/c - T) + F_2(R/c + T)$.

Nu rest nog de vraag hoe de functie F te kiezen zodat (2.42) vervuld zou zijn. Daartoe onderzoeken we de oplossing van de vergelijking voor $G(R, T)$ in de onmiddellijke omgeving van $R = 0$. Uit de gedaante voor $G(R, T)$ voor $R \neq 0$ en $T \neq 0$ volgt dat we in de buurt van $R = 0$ een oplossing mogen verwachten van de gedaante

$$G(R, T) = \frac{F(0, T)}{R} \quad (R \rightarrow 0). \quad (2.48)$$

waarbij termen van $\mathcal{O}(R^0)$ en hogere machten in R geen rol zullen spelen in de rest van de afleiding. Om nu een expliciete voorstelling voor F te bepalen, zullen we de differentiaalvergelijking

$$\square G(R, T) = -\delta(R)\delta(T) \quad (2.49)$$

integreren over een bol met willekeurige straal a en middelpunt in de oorsprong. Nadien kunnen we de straal a dan naar nul laten gaan. We vinden

$$\int_{\mathcal{B}(0,a)} \left(\nabla_R^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \right) \frac{F(0, T)}{R} d^3R = - \int_{\mathcal{B}(0,a)} \delta(R)\delta(T) d^3R. \quad (2.50)$$

Bekijken we de diverse termen apart. Ten eerste geldt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(0,a)} \nabla_R^2 \frac{F(0, T)}{R} d^3R &= F(0, T) \int_{\mathcal{B}(0,a)} \nabla_R \cdot \left(\nabla_R \frac{1}{R} \right) d^3R \\ &= F(0, T) \oint_{\partial \mathcal{B}(0,a)} \mathbf{n} \cdot \left(\nabla_R \frac{1}{R} \right) dS \\ &= F(0, T) \int a^2 d\Omega \left(\mathbf{e}_R \cdot \nabla_R \frac{1}{R} \right) \Big|_{R=a} \\ &= -4\pi F(0, T). \end{aligned} \quad (2.51)$$

We hebben hierbij gebruik gemaakt van de wet van Gauss, die uitermate eenvoudig wordt voor een bol. Daarmee is het plaatsafhankelijk stuk uitgerekend. Voor het tijdsafhankelijk deel van de d'Alembertiaan is

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(0,a)} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[\frac{F(0, T)}{R} \right] d^3R &= \frac{\partial^2 F(0, T)}{\partial T^2} \int_0^a \frac{1}{R} R^2 dR \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi a^2 \frac{\partial^2 F(0, T)}{\partial T^2}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

terwijl de bronterm in het rechterlid aanleiding geeft tot

$$\int_{\mathcal{B}(0,a)} \delta(R)\delta(T) d^3R = \delta(T). \quad (2.53)$$

Zo bekomen we samen dat

$$4\pi F(0, T) + \frac{2\pi a^2}{c^2} \frac{\partial^2 F(0, T)}{\partial T^2} = \delta(T). \quad (2.54)$$

Vermits de expansie $G(R, T) = F(0, T)/R$ enkel geldig is in de limiet $R \rightarrow 0$, moeten we in deze vergelijking de limiet $a \rightarrow 0$ nemen. Hieruit volgt onmiddellijk

$$F(0, T) = \frac{1}{4\pi} \delta(T). \quad (2.55)$$

Gecombineerd met de algemene vorm van $F(R, T)$ vinden we dat aan bovenstaande vergelijking wordt voldaan voor elke oplossing van de vorm

$$F(R, T) = \frac{1}{4\pi} \left[\alpha \delta \left(\frac{R}{c} + T \right) + (1 - \alpha) \delta \left(\frac{R}{c} - T \right) \right] \quad (2.56)$$

met α een willekeurige parameter. We zullen nu de twee basisoplossingen (corresponderend met $\alpha = 0$ en $\alpha = 1$) verder onderzoeken en besluiten dat $\alpha = 0$ de enige fysische oplossing is.

2.3 Vertraagde en versnelde potentialen en velden

De gezochte Greense functie is dus van de vorm

$$G(R, T) = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(\frac{R}{c} \pm T\right), \quad (2.57)$$

of bevat een lineaire combinatie van beide. Deze twee types Greense functies worden de causale Greense functies genoemd en worden respectievelijk aangeduid als de versnelde Greense functie G_a en de vertraagde Greenfunctie G_r ,

$$G_a(R, T) = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(\frac{R}{c} + T\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t - t' + \frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|}, \quad (2.58)$$

$$G_r(R, T) = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(\frac{R}{c} - T\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|}. \quad (2.59)$$

Deze benamingen worden duidelijk als we de singulariteiten in de δ -functies nader beschouwen. De coördinaten r en t corresponderen met de plaats en het tijdstip waar een bepaalde grootheid waargenomen of berekend wordt, zoals nadien met de velden hoort te gebeuren, en worden in die optiek opgevat als de *coördinaten van de waarnemer*. De coördinaten r' en t' corresponderen met de plaats en het tijdstip waar de fenomenen opgewekt worden en worden derhalve de *broncoördinaten* genoemd. In het geval van de versnelde Greenfunctie G_a is de singulariteit gegeven door

$$(G_a) \quad t' = t + \frac{|r-r'|}{c} \quad \text{zodat } t' > t, \quad (2.60)$$

en het beschouwde verschijnsel grijpt *later* plaats dan het waargenomen wordt! Voor de vertraagde Greense functie G_r is de singulariteit gegeven door

$$(G_r) \quad t' = t - \frac{|r-r'|}{c} \quad \text{zodat } t' < t, \quad (2.61)$$

en het *fenomeen grijpt vroeger plaats dan het geobserveerd wordt*. Het zal vooral G_r zijn die een belangrijke rol zal spelen in de fysische toepassingen, vermits dit in overeenstemming is met het *causaliteitsprincipe in de natuurkunde: de oorzaak gaat steeds het gevolg vooraf*. In de (louter conceptuele) limiet dat $c \rightarrow +\infty$ worden de relaties tussen t en t' vervangen door $t' = t$, zowel in het versnelde als in het vertraagde geval, waardoor het gevolg gelijktijdig met de oorzaak is. Dit is het geval in de klassieke mechanica, waar er in het Newtoniaanse relativiteitsprincipe (impliciet) een oneindige signaalsnelheid ondersteld wordt.

De fysische belangrijke particuliere oplossing van de vergelijkingen van d'Alembert met bekend rechterlid luidt dus

$$\phi_r(r, t) = \int G_r(r, t; r', t') f(r', t') d^3r' dt' \quad (2.62)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|} f(r', t') d^3r' dt' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f\left(r', t - \frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|} d^3r'. \quad (2.63)$$

Men spreekt dan ook van de *vertraagde oplossing*. De algemene integraal van de vergelijking van d'Alembert is dan gelijk aan de som van de algemene integraal van de homogene vergelijking van d'Alembert en een particuliere oplossing van de complete vergelijking. We vinden dus tenslotte

$$\phi(r, t) = \phi_s(r, t) + \phi_r(r, t), \quad (2.64)$$

waarbij $\phi_s(r, t)$ voldoet aan $\square\phi_s = 0$.

Laten we onze opgedane kennis nu toepassen op de vergelijkingen voor de scalaire potentiaal V en de vectorpotentiaal A . Dit levert achtereenvolgens voor

$$\square V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.65)$$

dat

$$V(r, t) = V_s(r, t) + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|} d^3r', \quad (2.66)$$

en voor

$$\square A = -\mu J \quad (2.67)$$

dat

$$A(r, t) = A_s(r, t) + \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|} d^3r'. \quad (2.68)$$

Hierin is $c^2 = 1/\varepsilon\mu$ en de scalaire potentiaal V_s en de vectorpotentiaal A_s voldoen aan de vrije veldvergelijkingen

$$\square V_s = 0 \quad \text{en} \quad \square A_s = 0, \quad (2.69)$$

en vanzelfsprekend ook aan de Lorenzvoorwaarde. De index s op de homogene oplossing staat voor *straling*, omdat de vrije veldvergelijkingen, zoals later zal blijken, elektromagnetische straling beschrijft (bepaald als massaloos energie- en impulstransport).

Uit de lineariteit van de uitdrukkingen voor de velden in functie van de potentialen en de vergelijkingen van Maxwell zelf ten opzichte van de veldgrootheden volgt dat deze ook kunnen geschreven worden als

$$\begin{aligned} E &= E_s + E_v, & D &= D_s + D_v, \\ H &= H_s + H_v, & B &= B_s + B_v. \end{aligned} \quad (2.70)$$

De grootheden E_s, D_s, H_s en B_s voldoen aan de Maxwellvergelijkingen zonder brontermen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot B_s &= 0, & \nabla \times E_s &= -\frac{\partial B_s}{\partial t}, \\ \nabla \cdot D_s &= 0, & \nabla \times H_s &= \frac{\partial D_s}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

en beschrijven het elektromagnetisch veld in afwezigheid van ladingen en stromen, met andere woorden het vrije veld.

De hier ontwikkelde methode wordt ook de *methode van de vertraagde potentialen* genoemd. De resultaten ervan zullen in diverse hoofdstukken van de cursus opduiken, zoals bij de behandeling van golven, van de elektrodynamica van bewegende ladingen en bij de overgang van de microscopische Maxwellvergelijkingen naar de macroscopische.

3 Elektrostatica

3.1 Splitsing tussen elektrische en magnetische eigenschappen

Bij statische problemen zijn alle grootheden expliciet tijdsonafhankelijk, waardoor de basisvergelijkingen van Maxwell ontkoppeld worden in twee onafhankelijke stelsels, namelijk één dat de *elektrische veldgrootheden bevat, samen met de ladingsdichtheid*,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0\end{aligned}\tag{2.72}$$

en één met de *magnetische veldgrootheden, samen met de stroomdichtheid*,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}\end{aligned}\tag{2.73}$$

Voor statische verschijnselen kunnen elektriciteitsleer en magnetisme als onafhankelijke fysische problemen behandeld worden. In het eerste geval spreekt men van *elektrostatica*, in het tweede van *magnetostatica*. Omdat statische verschijnselen gemakkelijker kunnen bestudeerd worden dan dynamische, zijn in de ontwikkelingsgeschiedenis van de fysica elektriciteit en magnetisme lange tijd als aparte takken van de fysica beschouwd. Na alle *dynamische* resultaten waarmee we namen als Coulomb, Ampère en Faraday associëren, is uiteindelijk onder Maxwell gebleken dat elektromagnetisme één samenhangend fysisch domein is en als zodanig behandeld moet worden.

3.2 Elektrostatiche velden en potentialen

Het uitgangspunt voor de rest van deze sectie is

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) &= \rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0,\end{aligned}\tag{2.74}$$

met de gebruikelijke constitutieve wet. De algemene uitdrukking van het elektrisch veld in functie van de elektromagnetische potentialen herleidt zich nu tot

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V}\tag{2.75}$$

waarbij V traditioneel de *elektrostatiche potentiaal* genoemd wordt. De vergelijking voor V volgt uit de wet van Gauss als

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon},\tag{2.76}$$

en heet nu de *vergelijking van Poisson*.

Een particuliere oplossing van de vergelijking van Poisson volgt uit de oplossing die we voor het algemeen geval gevonden hadden met behulp van de methode van de vertraagde potentialen. We vinden zonder tijdsafhankelijkheid onmiddellijk

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (2.77)$$

In het algemeen voldoet deze uitdrukking aan de fysische conditie die aan een potentiaal kan worden opgelegd, namelijk dat op oneindig grote afstand van een eindige ladingsverdeling de potentiaal zal verdwijnen. De algemene integraal van de vergelijking van Poisson luidt dan

$$V(\mathbf{r}) = V_s(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (2.78)$$

waarbij $V_s(\mathbf{r})$ voldoet aan de homogene vergelijking (van Laplace)

$$\nabla^2 V_s = 0. \quad (2.79)$$

In sommige problemen moet met V_s rekening gehouden worden om te kunnen voldoen aan vooropgegeven randvoorwaarden.

Voor een aantal speciale ladingsverdelingen moet de algemene formule

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (2.80)$$

aangepast worden. Hebben we te maken met een oppervlakteladingsverdeling met dichtheid η op een oppervlak S of met een lijnladingsverdeling met dichtheid λ langs een kromme C , dan schrijven we op een evidente manier

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\eta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS, \quad (2.81)$$

waarbij \mathbf{r}' het oppervlak S doorloopt, of

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds, \quad (2.82)$$

waarbij \mathbf{r}' de kromme C doorloopt. Tenslotte kunnen we ook een puntlading q in \mathbf{r}_0 plaatsen. De ruimteladingsdichtheid daarvoor is $q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, omdat bij integratie van deze ladingsdichtheid over een gebied dat \mathbf{r}_0 bevat als lading precies q wordt gevonden. Integreren we daarentegen over een gebied dat \mathbf{r}_0 (en dus q) niet bevat, dan vinden we niets. Vandaar dat we een welbekende uitdrukking uit de elementaire electrostatica terugvinden, namelijk

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \frac{q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (2.83)$$

3.3 Dipool

Alvorens over te gaan naar de algemene bespreking van de multipoolontwikkeling, herhalen we eerst het geval van een *statische dipool*, gedefinieerd als het geheel van twee gelijke en tegengestelde ladingen op een kleine afstand $d = |d|$ van elkaar geplaatst. In het waarnemingspunt W met vectorcoördinaat r is de elektrostatiche potentiaal gegenereerd door deze twee puntladingen

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{|r-r'-d|} - \frac{1}{|r-r'|} \right]. \quad (2.84)$$

Hierin is r' de vectorcoördinaat van de negatieve lading en $r'+d$ die van de positieve lading, zoals aangegeven op Figuur 2.2. Als we onderstellen dat $d = |d|$ klein is ten opzichte van $|r-r'|$, dan kunnen we een Taylorontwikkeling toepassen, eerst op

$$\begin{aligned} |r-r'-d| &= \sqrt{(r-r'-d)^2} = \sqrt{|r-r'|^2 - 2(r-r') \cdot d + d^2} \\ &= |r-r'| \sqrt{1 - 2 \frac{(r-r') \cdot d}{|r-r'|^2} + \dots} = |r-r'| \left(1 - \frac{(r-r') \cdot d}{|r-r'|^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Met

$$\frac{1}{|r-r'-d|} = \frac{1}{|r-r'|} \left(1 - \frac{(r-r') \cdot d}{|r-r'|^2} + \dots \right)^{-1} = \frac{1}{|r-r'|} + \frac{(r-r') \cdot d}{|r-r'|^3} + \dots \quad (2.86)$$

kunnen we de uitdrukking voor de potentiaal herschrijven als

$$V(r) = \frac{(r-r') \cdot (qd)}{4\pi\epsilon|r-r'|^3}. \quad (2.87)$$

Het dipoolmoment p is gedefinieerd als

$$p = qd. \quad (2.88)$$

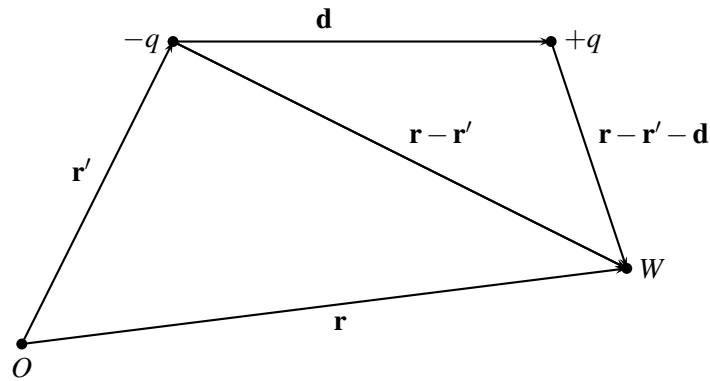
Voor een *punt dipool* wordt de limiet genomen waarbij d tot nul nadert en terzelfdertijd de lading q oneindig groot wordt, zodat het dipoolmoment $p = \lim_{d \rightarrow 0, q \rightarrow \infty} qd$ eindig blijft. Het dipoolmoment karakteriseert volledig de punt dipool. De elektrostatiche potentiaal en het elektrostatisch veld in het waarnemingspunt r voor een punt dipool op de plaats r_0 luiden

$$V(r) = \frac{R \cdot p}{4\pi\epsilon R^3} \quad (2.89)$$

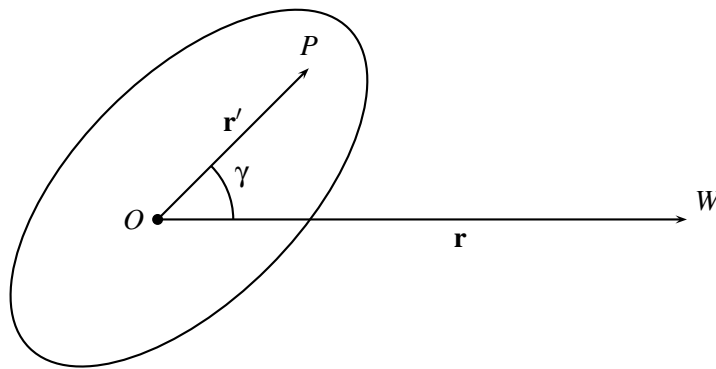
en

$$E(r) = -\nabla V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{3R(p \cdot R)}{R^5} - \frac{p}{R^3} \right], \quad (2.90)$$

waarin kort $R = r - r_0$ is geschreven.



Figuur 2.1: Configuratie voor een dipool



Figuur 2.2: Begrensde ladingsverdeling en externe waarnemer

3.4 Multipoolontwikkeling van de elektrostatiche potentiaal

We wensen nu de noties van puntlading en (punt)dipool te veralgemenen naar ladingen die verdeeld zijn in een bepaald ruimtelijk gebied. Om interpretatie- en integratiemoeilijkheden te vermijden plaatsen we de waarnemer buiten het ladingsgebied, zoals aangeduid op Figuur 2.2. Op die manier is de potentiaal van een gelocaliseerde ladingsverdeling met ladingsdichtheid ρ in een uitwendig punt r gegeven door

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} d^3r'. \quad (2.91)$$

De oorsprong van de integratie vectorcoördinaten wordt gekozen in een bepaald referentiepunt binnenin de ladingsverdeling.

We wensen nu de potentiaal te berekenen op grote afstand van de ladingsverdeling ($r \gg r'$). In

de driehoek OPW geldt

$$|r-r'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma, \quad (2.92)$$

waarbij γ de hoek is tussen de richting naar de waarnemer en de richting naar een generiek punt P van de ladingsverdeling. De noemer in de uitdrukking van V kan dan ook geschreven worden als

$$|r-r'| = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \gamma}. \quad (2.93)$$

Vermits $r' < r$ is verondersteld kunnen we gebruik maken van de voortbrengende functie van de Legendre polynomen (zie ook Bijlage B)

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \gamma}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma). \quad (2.94)$$

Substitutie in de uitdrukking voor V levert dan

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r^{\ell+1}} \int \rho(r') r'^{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma) d^3r' = \sum_{\ell=0}^{\infty} V_{\ell}(r). \quad (2.95)$$

Eén van de aspecten van de multipoolontwikkeling bestaat erin om voor de bijdragen

$$V_{\ell}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon r^{\ell+1}} \int \rho(r') r'^{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma) d^3r' \quad (2.96)$$

een gepaste interpretatie te vinden. Uiteraard doen we dit alleen voor de eerste termen uit deze reeks.

Beginnend met $V_0(r)$ zien we dat

$$V_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon r} \int \rho(r') P_0(\cos \gamma) d^3r' = \frac{q}{4\pi\epsilon r}, \quad (2.97)$$

vermits $P_0 \equiv 1$ en de resterende integraal niets anders is dan de totale lading q begrepen in het ladingsgebied. Men noemt deze bijdrage de *monopoolterm*, die zich gedraagt alsof een puntlading q geplaatst was in de oorsprong. Vandaar het belang van de keuze van O binnen in het gebied waarin de ladingen verdeeld zijn.

De tweede term in de reeks luidt

$$V_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon r^2} \int \rho(r') r' P_1(\cos \gamma) d^3r'. \quad (2.98)$$

Daar $P_1(\cos \gamma) \equiv \cos \gamma$ en bovendien $rr' \cos \gamma = r \cdot r'$, wordt dit herschreven als

$$V_1(r) = \frac{r}{4\pi\epsilon r^3} \cdot \int \rho(r') r' d^3r'. \quad (2.99)$$

Definiëren we nu het dipoolmoment van de ladingsverdeling als

$$p = \int \rho(r') r' d^3 r', \quad (2.100)$$

dan komt er

$$V_1(r) = \frac{r \cdot p}{4\pi\epsilon r^3}. \quad (2.101)$$

Dit is de typische uitdrukking voor de elektrostatiche potentiaal van een puntdipool in het referentiepunt, met een dipoolmoment p . Men spreekt dan ook van de *dipoolterm*, die een eerste aanzet is om aan te geven hoe de ladingsverdeling afwijkt van perfecte sferische symmetrie, wat herleidbaar zou zijn tot een effectieve puntlading alleen (zie ook de oefeningen). Het dipoolmoment en de hogere multipoolmomenten houden op die manier rekening met de richtingsafwijkingen van de ladingsverdeling.

De derde term in de reeks is van de gedaante

$$V_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon r^3} \int \rho(r') r'^2 P_2(\cos\gamma) d^3 r'. \quad (2.102)$$

Nu is echter

$$P_2(\cos\gamma) = \frac{1}{2}(3\cos^2\gamma - 1) \quad (2.103)$$

zodat

$$\begin{aligned} V_2(r) &= \frac{1}{8\pi\epsilon r^3} \int \rho(r') r'^2 (3\cos^2\gamma - 1) d^3 r' = \frac{1}{8\pi\epsilon r^3} \int \rho(r') r'^2 \left[3 \left(\frac{r \cdot r'}{r r'} \right)^2 - 1 \right] d^3 r' \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon r^5} \int \rho(r') [3(r \cdot r')^2 - r^2 r'^2] d^3 r' \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon r^5} r \cdot \left\{ \int \rho(r') [3r' \otimes r' - r'^2 \mathbf{1}] d^3 r' \right\} \cdot r. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Bij de laatste stap hebben we de vectoren r , die onafhankelijk zijn van de integratie over de ladingsverdeling, eruit gebracht. Verder stelt $\mathbf{1}$ de eenheidstensor voor, en de uitdrukking tussen accolades stelt een *tensor (van rang 2)* voor, die men het *kwadrupoolmoment* van de ladingsverdeling noemt,

$$K = \int \rho(r') [3r' \otimes r' - r'^2 \mathbf{1}] d^3 r', \quad (2.105)$$

of in componenten geschreven,

$$K_{ij} = \int \rho(r') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] d^3 r'. \quad (2.106)$$

Vandaar dat

$$V_2(r) = \frac{r \cdot K \cdot r}{8\pi\epsilon r^5} \quad (2.107)$$

de *kwadrupterm* genoemd wordt. We zien dat K een symmetrische tensor is en het spoor van $[K_{ij}]$ verdwijnt. Door verdere termen in acht te nemen in de ontwikkeling kunnen we *hogereordemultipolen* definiëren. We kunnen stellen dat het eerste multipoolmoment dat niet verdwijnt de dominante bijdrage levert tot de potentiaal op grote afstand, omdat steeds grotere machten van r in de noemer optreden, waardoor deze termen sneller naar nul gaan bij grote r .

Merken we ook nog op dat de totale lading q een eigenschap van de ladingsdistributie is, onafhankelijk van de keuze van het referentiepunt. De hogereordemultipoolmomenten, die richtingsafhankelijke eigenschappen van de ladingsverdelingen vertolken, zijn echter wel bepaald door de keuze van de oorsprong. Inderdaad, kiezen we een andere oorsprong, dan luiden de transformatieformules via een translatie

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \mathbf{a}, \quad (2.108)$$

zodat

$$q = \int \rho'(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \int \rho(\mathbf{r}'') d^3\mathbf{r}'' = q', \quad (2.109)$$

maar

$$p = \int \rho'(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3\mathbf{r}' = \int \rho(\mathbf{r}'')(\mathbf{r}'' + \mathbf{a}) d^3\mathbf{r}'' = p' + \mathbf{a} q, \quad (2.110)$$

vermits $\rho'(\mathbf{r}') \equiv \rho(\mathbf{r}'')$.

Resumerend hebben we voor de elektrostatiche potentiaal de volgende multipoolontwikkeling

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}{2r^5} + \dots \right]. \quad (2.111)$$

Voor het elektrisch veld krijgen we een analoge ontwikkeling door inwerking van de gradiënt-operator en steunend op

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.112)$$

Zo vinden we

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{q\mathbf{n}}{r^2} + \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{p}}{r^3} + \frac{5(\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{n}}{2r^4} + \dots \right], \quad (2.113)$$

waarbij \mathbf{n} de eenheidsvector \mathbf{r}/r voorstelt.

4 Magnetostatica

4.1 Algemene besluiten

Vermits bij statische problemen er ontkoppeling ontstaat tussen elektrische en magnetische verschijnselen, behandelen we na de elektrostatica nu de magnetostatica, uitgaand van

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Uit de laatste vergelijking volgt onmiddellijk dat

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2.115)$$

Deze betrekking volgt eveneens uit ladingsbehoud,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.116)$$

vermits de ladingsdichtheid ρ expliciet onafhankelijk is van de tijd. Alleen stationaire stromen kunnen besproken worden in de magnetostatica. Uit het verdwijnen van $\nabla \cdot \mathbf{J}$ volgt dat de lijnen waarlangs de stroomdichtheid verandert noch een begin, noch een einde hebben, wat betekent dat de stroomkringen ofwel gesloten zijn ofwel zich aan beide zijden tot oneindig uitstrekken.

Met de Lorenz-ijk voor A vinden we dan

$$\nabla^2 A(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (2.117)$$

als speciaal tijdonafhankelijk geval van de algemene vergelijking van d'Alembert. Een gepaste particuliere oplossing volgt onmiddellijk uit de oplossing voor de algemene vergelijking, via de methode van de vertraagde potentialen,

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (2.118)$$

Men kan gemakkelijk nagaan dat deze uitdrukking voor de vectorpotentiala voldoet aan de vergelijking van Poisson en dat bovendien ook voldaan is aan de ijkvoorwaarde.

4.2 Multipoolontwikkeling van de vectorpotentiala

Op een volkomen analoge manier als voor een gelokaliseerde ladingsverdeling zullen we nu een gelokaliseerde stroomverdeling $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ beschouwen in een gebied rond de oorsprong en ver van de waarnemer. Dan kan

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (2.119)$$

ontwikkeld worden tot

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r^{\ell+1}} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') r'^{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma) d^3\mathbf{r}' = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell}(\mathbf{r}), \quad (2.120)$$

door weer gebruik te maken van de voortbrengende functie van de Legendre veeltermen

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \gamma}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma) \quad (2.121)$$

om $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ in reeks te ontwikkelen. Echter zullen we omwille van de meer gecompliceerde vectoruitdrukkingen in

$$A_{\ell}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi r^{\ell+1}} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') r'^{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma) d^3\mathbf{r}' \quad (2.122)$$

de bespreking van de magnetische multipoolontwikkeling beperken tot de bijdragen $A_0(\mathbf{r})$ en $A_1(\mathbf{r})$, zonder te proberen de (magnetische) kwadrupoolterm $A_2(\mathbf{r})$ expliciet uit te rekenen. Om de notatie in de volgende berekeningen wat te verlichten schrijven we kort $J' = J(\mathbf{r}')$.

Beginnen we met de eerste term in de reeks,

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi r} \int J' d^3\mathbf{r}', \quad (2.123)$$

dan komt het erop aan te bewijzen dat deze wegvalt. Daartoe maken we gebruik van $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ om te schrijven dat

$$\nabla' \cdot (\mathbf{J}' \otimes \mathbf{r}') = \mathbf{J}' \quad (2.124)$$

in elk inwendig punt \mathbf{r}' van het stroomgebied, wat eenvoudig te bewijzen valt in componenten

$$[\nabla' \cdot (\mathbf{J}' \otimes \mathbf{r}')]_i = \frac{\partial J'_j}{\partial x'_j} x'_i + J'_j \frac{\partial}{\partial x'_j} x'_i = J'_i. \quad (2.125)$$

Zo wordt met behulp van de stelling van Green-Ostrogradski

$$\int J' d^3\mathbf{r}' = \int \nabla' \cdot (\mathbf{J}' \otimes \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \int_{\partial V} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}') \mathbf{r}' dS = 0, \quad (2.126)$$

omdat \mathbf{J} binnenin het integratiegebied blijft. Er is *geen magnetische monopoolterm*, wat overeenkomt met het niet bestaan van magnetische monopolen of magnetische ladingen.

De vectorpotentiaal begint dus pas met een magnetische dipoolterm. Daartoe vertrekken we van de tweede term in de multipoolontwikkeling,

$$A_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi r^2} \int J' r' P_1(\cos \gamma) d^3\mathbf{r}' = \frac{\mu}{4\pi r^3} \int J' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{r}'. \quad (2.127)$$

We herschikken het integrandum door op te merken dat het doet denken aan (een deel van) de uitwerking van een dubbel vectorproduct en bekomen achtereenvolgens

$$\begin{aligned} 2J'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') &= (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}') \times \mathbf{r} + \mathbf{r}'(\mathbf{J}' \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{J}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \\ &= (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}') \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{J}' \otimes \mathbf{r}' + \mathbf{r}' \otimes \mathbf{J}'). \end{aligned} \quad (2.128)$$

We kunnen het gedeelte $\mathbf{J}' \otimes \mathbf{r}' + \mathbf{r}' \otimes \mathbf{J}'$ in componenten herschrijven als volgt

$$J'_i x'_k + x'_i J'_k = \frac{\partial}{\partial x'_\ell} (J'_\ell x'_i x'_k), \quad (2.129)$$

door nogmaals te steunen op $\nabla' \cdot \mathbf{J}' = 0$. Zo is in tensornotatie

$$\mathbf{J}' \otimes \mathbf{r}' + \mathbf{r}' \otimes \mathbf{J}' = \nabla' \cdot [\mathbf{J}' \otimes (\mathbf{r}' \otimes \mathbf{r}')]. \quad (2.130)$$

Na integratie volgt dat

$$\int [\mathbf{J}' \otimes \mathbf{r}' + \mathbf{r}' \otimes \mathbf{J}'] d^3\mathbf{r}' = \int \nabla' \cdot [\mathbf{J}' \otimes (\mathbf{r}' \otimes \mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}' = \int_{\partial V} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}') (\mathbf{r}' \otimes \mathbf{r}') dS' = 0, \quad (2.131)$$

vermits de stromen beperkt blijven tot het binnengebied. Op die manier blijft er voor de bepaling van $A_1(\mathbf{r})$ over dat

$$A_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi r^3} \int J'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) d^3 r' = \frac{\mu}{4\pi r^3} \left(\frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' \right) \times \mathbf{r}. \quad (2.132)$$

Definiëren we het magnetisch dipoolmoment \mathbf{m} van de gegeven stroomdistributie als

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (2.133)$$

dan kan de dipoolterm in de vectorpotential geschreven worden als

$$A_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu \mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}. \quad (2.134)$$

Bemerk terug dezelfde $1/r^2$ afhankelijkheid die ook de elektrostatische dipoolterm karakteriseert.

De hoofdreden om $A_1(\mathbf{r})$ op te schrijven door middel van \mathbf{m} is dat voor een vlakke gesloten stroomkring, waardoor een stroom met sterkte I loopt, de formule voor \mathbf{m} zich herleidt tot het klassieke resultaat

$$\mathbf{m} = I S \mathbf{n}. \quad (2.135)$$

Hierin is S de oppervlakte ingesloten door de stroomkring, en \mathbf{n} een eenheidsnormaal loodrecht op het vlak van de stroomkring, met een zin die bepaald wordt door de stroomrichting. Inderdaad, voor een vlakke stroomkring herleidt (2.133) zich tot

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{s}'. \quad (2.136)$$

Kiezen we de oorsprong zo dat die binnen de stroomkring ligt en parameteriseren we de stroomkring in poolcoördinaten als $r = f(t)$, $\phi = t$ met $t \in [0, 2\pi]$, of dus $\mathbf{r}(t) = f(t)(\cos t \mathbf{e}_x + \sin t \mathbf{e}_y)$, dan is $d\mathbf{s} = (d\mathbf{r}/dt) dt = f'(t)(\cos t \mathbf{e}_x + \sin t \mathbf{e}_y) + f(t)(-\sin t \mathbf{e}_x + \cos t \mathbf{e}_y)$. We vinden dan $\mathbf{r}(t) \times (d\mathbf{r}/dt) = f(t)^2 \mathbf{e}_z$ met $\mathbf{e}_z = \mathbf{n}$ de normaal op het oppervlak, en dus

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \mathbf{n} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = I \mathbf{n} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} r dr = I \mathbf{n} \int dS, \quad (2.137)$$

waarbij dS de oppervlakte van een elementaire wig vanuit O voorstelt, met opening $d\varphi$. Zo wordt uiteindelijk

$$\mathbf{m} = I S \mathbf{n}. \quad (2.138)$$

Tenslotte willen we nog de magnetische inductie berekenen in het waarnemingspunt. Vermits \mathbf{m} constant is bij gegeven stroomgebied, volgt er dat

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \mathbf{m} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right\}. \quad (2.139)$$

Gelet op

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_j}{r^3} \right) = \frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3 \frac{x_i x_j}{r^5} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{r^3} \right), \quad (2.140)$$

vinden we niet alleen dat

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0, \quad (2.141)$$

maar ook dat

$$\left[(\mathbf{m} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right]_i = m_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{r^3} \right) = m_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_j}{r^3} \right) = \left[\nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \right]_i. \quad (2.142)$$

Daarmee wordt de uitdrukking voor B herschreven als

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu}{4\pi} \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (2.143)$$

en kunnen we

$$V_m = \frac{\mu \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (2.144)$$

interpreteren als een soort van magnetische scalaire potentiaal, analoog aan wat zich voordoet in de electrostatica. Op te merken valt dat dit maar geldt voor een beperkt stroomgebied rond de oorsprong en bij verwaarlozing van de hogere multipoolbijdragen.

5 Kwantumdeeltjes in een elektromagnetisch veld

5.1 Schrödingervergelijking van een deeltje in een elektromagnetisch veld

Om de Schrödingervergelijking van een deeltje in een elektromagnetisch veld te kunnen bepalen, zullen we eerst de klassieke Lagrangiaan en vervolgens Hamiltoniaan³ afleiden voor een elektrisch geladen deeltje bewegend in een elektromagnetisch veld.

Bemerk vooreerst dat de Lagrangiaan \mathcal{L} een functie is van positiecoördinaten, snelheidscoördinaten en de tijdscoördinaat. Deze 7 coördinaten zijn voor $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ onafhankelijk. Wanneer we de actie definiëren, vullen we echter in de Lagrangiaan een specifiek pad $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ en $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}(t)$ in, en integreren we de bekomen functie (die enkel nog van de tijd afhangt) over een bepaald tijdsinterval. Opleggen dat deze integraal extremaal is ten opzichte van kleine wijzigingen in het pad, leidt tot de Euler-Lagrange-vergelijkingen

$$\frac{d}{dt} \left[\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{L}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \right] - \nabla_{\mathbf{r}} \mathcal{L}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) = 0 \quad (2.145)$$

De volgorde is hierbij van belang. We berekenen eerst de partiële afgeleiden van de functie $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ met 7 onafhankelijke argumenten naar de eerste 3 argumenten (genoteerd als $\nabla_{\mathbf{r}}$) en naar de

³Zie ook "Inleiding tot de theoretische fysica" en bijlage C voor een korte samenvatting.

volgende 3 argumenten (genoteerd als ∇_u). Zo bekomen we twee nieuwe (vector)functies van 7 argumenten. Daarin vullen we nu opnieuw de positie en snelheid langsheen het pad in, zodat we een functie van de tijd bekomen. In de eerste term van bovenstaande vergelijking leiden we deze functie van de tijd nog eens af naar de tijd.

Voor een Lagrangiaan van de vorm $\mathcal{L}(r, u, t) = \frac{1}{2}mu^2 - U(r)$ bekomen we de wet van Newton $m \frac{d^2r}{dt^2} = -\nabla_r U(r(t))$ voor een deeltje in een conservatief krachtveld, dat dus enkel van de plaats afhangt. Vergelijken we dit met de wet van Newton voor een deeltje onderhevig aan de Lorentzkracht,

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = e(E(r(t), t) + \dot{r}(t) \times B(r(t), t)), \quad (2.146)$$

dan zien we dat we de snelheidsafhankelijkheid in het rechterlid niet op deze manier gaan kunnen bekomen. We stellen daarom een algemenere vorm voorop, waarbij de functie U nu ook van de snelheidscoördinaten u en de tijd t kan afhangen. Bemerkt dat deze dan niet meer de betekenis van potentiële energie kan worden gegeven. Voor $U(r, u, t)$ bekomen we als Euler-Lagrange vergelijking

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = -\nabla_r U(r(t), \dot{r}(t), t) + \frac{d}{dt} [\nabla_u U(r(t), \dot{r}(t), t)] \quad (2.147)$$

Dit moeten we nu op dezelfde manier interpreteren, we berekenen eerst de partiele afgeleiden van U naar de onafhankelijke positie- en snelheidscoördinaten, en vullen dan het pad en de bijbehorende snelheid in, waardoor we een functie bekomen die enkel van de tijd afhangt. In de tweede term moeten we dan nog een afgeleide naar de tijd nemen, die je een totale afgeleide zou noemen.

Laat ons nu de Lorentzkracht manipuleren zodat we ze in deze vorm kunnen krijgen, dat is, zodat we een functie $U(r, u, t)$ kunnen identificeren die tot de Lorentzkracht leidt. Hiertoe drukken we het elektrisch en het magnetisch veld uit aan de hand van de scalaire potentiaal V en de vectorpotentiaal A

$$E(r, t) = -\nabla V(r, t) - \frac{\partial}{\partial t} A(r, t), \quad B(r, t) = \nabla \times A(r, t), \quad (2.148)$$

waardoor we vinden dat

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = e \left(-\nabla_r V(r(t), t) - \frac{\partial A}{\partial t}(r(t), t) + \dot{r}(t) \times (\nabla_r \times A(r(t), t)) \right). \quad (2.149)$$

Opnieuw werken hier de afgeleiden ∇_r en $\partial/\partial t$ in op $V(r, t)$ en $A(r, t)$ als velden, dus met onafhankelijke coördinaten r en t , en wordt nadien pas het pad $r(t)$ ingevuld. Via de vectoridentiteit

$$u \times (\nabla \times A) = \nabla(u \cdot A) - (u \cdot \nabla)A \quad (2.150)$$

en

$$\frac{d}{dt} [A(r(t), t)] = \frac{\partial A}{\partial t}(r(t), t) + (\dot{r}(t) \cdot \nabla_r) A(r(t), t) \quad (2.151)$$

kan de Lorentzkracht herschreven worden als

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \left[\nabla_{\mathbf{r}} (eV(\mathbf{r}, t) - e\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) \right] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t), \mathbf{u}=\dot{\mathbf{r}}(t)} - \frac{d}{dt} \left[(e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t), \mathbf{u}=\dot{\mathbf{r}}(t)} \right] \quad (2.152)$$

Wanneer we vergelijken met (2.147), dan suggereert de eerste term de keuze $U(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = eV(\mathbf{r}, t) - e\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Als we ook de tweede term vergelijken, zien we dat dit consistent is.

De Lagrangiaan van een deeltje met massa m in een elektromagnetisch veld luidt dus

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - eV(\mathbf{r}, t) + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (2.153)$$

waarbij we nu opnieuw de meer conventionele keuze $\dot{\mathbf{r}}$ in plaats van \mathbf{u} gebruiken voor de snelheidscoördinaten, die in deze als onafhankelijke coördinaten van \mathbf{r} moeten worden gelezen. We vullen op dit moment geen specifiek pad in. Om de Hamiltoniaan te berekenen, hebben we het canonisch toegevoegd moment nodig, gegeven door

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = m \dot{r}_i + eA_i. \quad (2.154)$$

De Hamiltoniaan

$$\mathcal{H} = \sum_i \dot{r}_i p_i - \mathcal{L} \quad (2.155)$$

wordt zo

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + eV. \quad (2.156)$$

We besluiten dus onder andere dat in een extern elektromagnetisch veld, het momentum wordt aangepast via

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}. \quad (2.157)$$

Opmerking De Schrödingervergelijking zelf bekomen we door de overgang te maken naar de kwantummechanica met de substitutie

$$\mathbf{p} \rightarrow \widehat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla \quad (2.158)$$

in de configuratierepresentatie. De Hamiltoniaanse operator wordt dan:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - e\mathbf{A})^2 + eV \quad (2.159)$$

en de Schrödingervergelijking zelf dus

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \psi + eV \psi. \quad (2.160)$$

met ψ de golffunctie van ons deeltje.

5.2 Het ijkprincipe in de kwantummechanica

We kunnen de vergelijking (2.160) nog herschrijven als volgt

$$i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar}V\right)\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}\right)^2\psi. \quad (2.161)$$

We herbekijken nog even de Schrödingervergelijking in het “vrije” geval, i.e. zonder \mathbf{A} en V :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \quad (2.162)$$

Als we (2.161) vergelijken met (2.162), dan zien we dat we, met de volgende “substitutie” van de afgeleiden

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow D_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar}V, \quad \nabla \rightarrow D \equiv \nabla - \frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}, \quad (2.163)$$

de vrije Schrödingervergelijking, (2.162), kunnen omzetten in degene in een elektromagnetisch veld, (2.161). De operatoren D_0 en D noemen we de *covariante afgeleiden*, waarmee we de Schrödingervergelijking (2.161) bondig schrijven als

$$i\hbar D_0\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}D^2\psi. \quad (2.164)$$

Vanwaar komen deze covariante afgeleiden nu? Het is duidelijk dat (2.162) invariant is onder de *globale* transformatie

$$\psi \rightarrow e^{\frac{ie}{\hbar}\theta}\psi, \quad (2.165)$$

met θ constant⁴. Onderstel nu dat we θ plaats- en tijdsafhankelijk maken, dan is de volgende *lokale* transformatie

$$\psi \rightarrow e^{\frac{ie}{\hbar}\theta(\mathbf{r},t)}\psi \quad (2.166)$$

niet langer een symmetrie van (2.165). Inderdaad, toepassing van (2.166) op (2.162) levert, na wegdeling van $e^{\frac{ie}{\hbar}\theta}$, de volgende getransformeerde vergelijking

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - e\frac{\partial\theta}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{ie}{\hbar}\nabla^2\theta + 2\frac{ie}{\hbar}(\nabla\theta)\cdot\nabla - \frac{e^2}{\hbar^2}(\nabla\theta)^2 + \nabla^2\right)\psi, \quad (2.167)$$

vermits

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\frac{ie}{\hbar}\theta}\psi\right) &= e^{\frac{ie}{\hbar}\theta}\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - e\frac{\partial\theta}{\partial t}\psi\right), \\ \nabla^2\left(e^{\frac{ie}{\hbar}\theta}\psi\right) &= \partial_j^2\left(e^{\frac{ie}{\hbar}\theta}\psi\right) = \partial_j\left(\frac{ie}{\hbar}\partial_j\theta e^{\frac{ie}{\hbar}\theta}\psi + e^{\frac{ie}{\hbar}\theta}\partial_j\psi\right) \\ &= \frac{ie}{\hbar}\partial_j^2\theta\psi e^{\frac{ie}{\hbar}\theta} + \frac{ie}{\hbar}\partial_j\theta\partial_j\psi e^{\frac{ie}{\hbar}\theta} - \frac{e^2}{\hbar^2}(\partial_j\theta)^2\psi e^{\frac{ie}{\hbar}\theta} + \frac{ie}{\hbar}\partial_j\theta\partial_j\psi e^{\frac{ie}{\hbar}\theta} \\ &\quad + e^{\frac{ie}{\hbar}\theta}\partial_j^2\psi \\ &= e^{\frac{ie}{\hbar}\theta}\left(\frac{ie}{\hbar}\nabla^2\theta + 2\frac{ie}{\hbar}(\nabla\theta)\cdot\nabla - \frac{e^2}{\hbar^2}(\nabla\theta)^2 + \nabla^2\right)\psi. \end{aligned} \quad (2.168)$$

⁴Vandaar de benaming “globaal”, de transformatieparameter θ is overal en altijd dezelfde.

Het is dan op zicht duidelijk dat de oorspronkelijke vergelijking (2.162) en zijn getransformeerde versie (2.167) niet equivalent zijn.

Het expliciet plaats- en tijdsafhankelijk maken van de transformatieparameter θ noemen we het *ijken* van de invariantie (2.165). Willen we dat (2.166) een symmetrie blijft van de Schrödinger-vergelijking, dan is het duidelijk dat we iets extra moeten doen. Het antwoord ligt in het invoeren van een stel potentialen V en A . Inderdaad, de Schrödinger-vergelijking (2.164) is wel invariant onder de lokale transformatie (2.166), op voorwaarde dat we V en A laten mee transformeren als volgt:

$$V \rightarrow V - \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad A \rightarrow A + \nabla \theta. \quad (2.169)$$

Gebruik makend van

$$\begin{aligned} D_0 \psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar} V \right) \psi &\rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar} V - \frac{ie}{\hbar} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \left(e^{\frac{ie}{\hbar} \theta} \psi \right) = e^{\frac{ie}{\hbar} \theta} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar} V \right) \psi \\ &= e^{\frac{ie}{\hbar} \theta} D_0 \psi, \\ D \psi = \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} A \right) \psi &\rightarrow \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} A - \frac{ie}{\hbar} \nabla \theta \right) \left(e^{\frac{ie}{\hbar} \theta} \psi \right) = e^{\frac{ie}{\hbar} \theta} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} A \right) \psi = e^{\frac{ie}{\hbar} \theta} D \psi, \end{aligned}$$

vinden we dan eenvoudig

$$i\hbar D_0 \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} D^2 \psi \rightarrow i\hbar D_0 \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} D^2 \psi. \quad (2.170)$$

De covariante afgeleiden transformeren dusdanig mee zodat de exponentiële $e^{\frac{ie}{\hbar} \theta}$ van de transformatie (2.166) er terug gewoon doorheen kan getrokken worden (net zoals een constante fasefactor doorheen een gewone afgeleide kan getrokken worden).

In de transformatie (2.169) herkennen we niets anders dan een ijktransformatie, vergelijk immers met (2.18). Om een globale symmetrie te kunnen omzetten in een lokale symmetrie worden we genoodzaakt extra velden (in ons geval de elektromagnetische potentialen V en A) in te voeren. De laatste stap van het ijkprincipe is dan nog het vinden van de bewegingsvergelijkingen voor deze V en A zelf, maar dit onderzoeken zou ons nu te ver leiden. Het is uiteraard wel de bedoeling dat de gezochte bewegingsvergelijkingen ook invariant zullen zijn onder de lokale transformatie (2.169). Wij kennen deze bewegingsvergelijkingen echter al: de Maxwellvergelijkingen. We hebben inderdaad reeds aangetoond dat (2.169) een symmetrie voorstelt van elektromagnetisme (zie eerder in dit hoofdstuk), m.a.w. *de elektromagnetische interactie is een lokale ijktheorie*. Zoals reeds eerder vermeld in de cursus, ligt bovenstaand ijkprincipe aan de basis van alle gekende elementaire interacties.

5.3 Het Aharonov-Bohm effect

Voor de kwantummechanische beschrijving van geladen deeltjes in een elektromagnetisch veld moeten we een Hamiltoniaan invoeren die expliciet de scalaire potentiaal V en vectorpotentiaal A bevat. Dit is anders als in het klassieke geval, waar deze potentialen een louter wiskundig hulpmiddel zijn die nooit rechtstreeks opduiken in de vergelijkingen van Maxwell of in de

bewegingsvergelijking van Newton, en dus in het bijzonder in de Lorentzkracht. Aangezien de kwantummechanische beschrijving echter nog steeds toelaat om ijktransformaties door te voeren, lijkt het dat net alsof de klassieke mechanica enkel de ijk-invariante velden E en B relevant zijn voor de beweging van kwantummechanische deeltjes. Deze ijktransformatie verandert echter de fase van de golf functie, en het is dus maar de vraag in welke mate dit effect meetbaar is. Hoewel globale fases in de kwantummechanica niet meetbaar zijn, kunnen faseverschillen wel gemeten worden via interferentie-experimenten.

Om te onderzoeken in welke mate de kwantummechanische beschrijving afhangt van de potentialen zelf beschouwen we bijvoorbeeld de aanwezigheid van een statische vectorpotential $A \neq 0$ die zo gekozen is dat de bijbehorende magnetische inductie verdwijnt: $B = \nabla \times A = 0$. De Schrödingervergelijking wordt dan gegeven door

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} A \right)^2 \psi. \quad (2.171)$$

Indien de beweging van het deeltje beperkt is tot een enkelvoudig samenhangend gebied, kunnen we nu een ijktransformatie uitvoeren die gegeven wordt door

$$\theta(x) = - \int_{x_0}^x A \cdot dl \quad (2.172)$$

Deze definitie hangt niet af van het gekozen pad van de integraal, net omdat A irrotationeel is en het gebied enkelvoudig samenhangend is. Deze ijktransformatie zorgt ervoor dat $\psi' = \psi \exp(ie/\hbar \theta)$ en dat $A' = A + \nabla \theta = 0$, met andere woorden ψ' is een oplossing van de vrije Schrödingervergelijking zonder vectorpotential. We kunnen deze relatie dus omdraaien om te besluiten dat de golf functie ψ in aanwezigheid van A gegeven wordt door

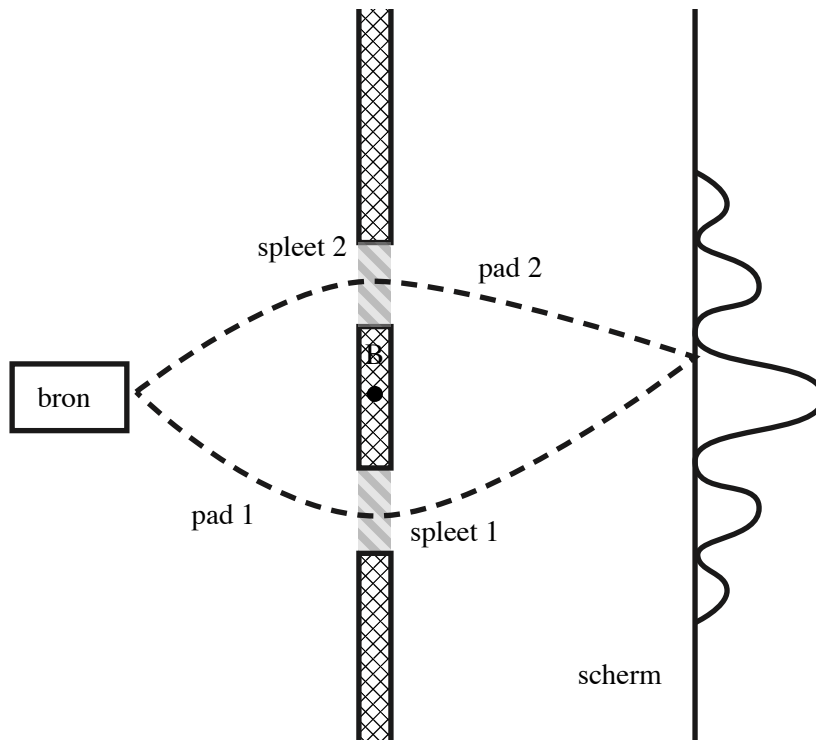
$$\psi = \psi' \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} \theta\right) = \psi' \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{x_0}^x A \cdot dl\right) \quad (2.173)$$

waarbij ψ' een oplossing is van de vrije Schrödingervergelijking ($A = 0$).

Beschouw nu één van de belangrijkste (interferentie-)experimenten uit de kwantummechanica, namelijk het tweespletenexperiment. Stel dat het stuk tussen de twee spleten gevormd wordt door een oneindig lange spoel waarbinnen we een magnetische inductie B kunnen opwekken. De bijbehorende magnetische flux is $\Phi_B = BS$ met S de oppervlakte van de doorsnede van de spoel.

Een elektronenbron zendt een coherente bundel uit van deeltjes. We bekijken nu eerst de golf functie van het deeltje in afwezigheid van het magnetisch veld ($B = 0$), dus als er geen stroom door de spoel loopt. Indien enkel spleet 1 geopend is, is de golf functie van het deeltje $\psi_0^{(1)}(x)$ een oplossing van de vrije Schrödingervergelijking; in de gearceerde gebieden en ter hoogte van spleet 2 is de golf functie 0. Indien enkel spleet 2 geopend is geeft dit aanleiding tot een golf functie $\psi_0^{(2)}(x)$ die 0 is in het gearceerde gebied en ter hoogte van spleet 1. Wanneer beide spleten geopend zijn, zal de golf functie van het deeltje gegeven zijn door

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_0^{(1)}(x) + \psi_0^{(2)}(x) \right]. \quad (2.174)$$



Figuur 2.3: Tweespletenexperiment met een spoel tussen beide spleten.

Dit is inderdaad een oplossing van de vrije Schrödinger vergelijking die enkel nul is in het gearceerde gebied, maar van nul verschilt ter hoogte van beide spleten. Het x -afhankelijke faseverschil tussen de beide termen in de golf functie zal afwisselend constructief en destructief optellen en aanleiding geven tot een bepaald interferentiepatroon op het scherm.

We analyseren dit experiment nu opnieuw wanneer we de stroom doorheen de spoel aanschakelen. Dit geeft aanleiding tot het magnetisch veld B in het gearceerde stuk tussen de 2 spleten. Dit is echter verboden terrein voor de uitgezonden elektronen, de golf functie zal steeds nul zijn in dit gebied en overal waar de golf functie verschillend is van nul geldt $B = \nabla \times A = 0$. Wanneer enkel spleet 1 open is, moeten we de golf functie $\psi_B^{(1)}$ bepalen in een enkelvoudig samenhangend gebied. We kunnen dan de ijktransformatie van hierboven gebruiken om $\psi_B^{(1)}$ uit te drukken in functie van de vrije golf functie $\psi_0^{(1)}$ als

$$\psi_B^{(1)}(x) = \psi_0^{(1)}(x) \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{\text{pad 1}}^x A \cdot dl\right). \quad (2.175)$$

Analoog, wanneer enkel spleet 2 open is vinden we de golf functie

$$\psi_B^{(2)}(x) = \psi_0^{(2)}(x) \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{\text{pad 2}}^x A \cdot dl\right). \quad (2.176)$$

Wanneer beide spleten open zijn, kunnen we net zoals voorheen een lineaire superpositie maken

van de twee oplossingen. Dit geeft aanleiding tot

$$\begin{aligned}
 \psi_B(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_B^{(1)}(x) + \psi_B^{(2)}(x)]. \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_0^{(1)}(x) \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{\text{pad 1}}^x \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) + \psi_0^{(2)}(x) \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{\text{pad 2}}^x \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_0^{(1)}(x) \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) + \psi_0^{(2)}(x) \right] \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{\text{pad 2}}^x \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right)
 \end{aligned} \tag{2.177}$$

De fase $\int_{\text{pad 2}}^x \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ in de gezamenlijke factor zal wegvallen in de waarschijnlijkheid $|\psi_B(x)|^2$ en dus niet zichtbaar zijn in het interferentie-experiment. Het faseverschil $\Delta\alpha = e/\hbar \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ tussen de twee termen zal echter niet wegvallen en zal de plaatsen van constructieve en destructieve interferentie veranderen. Dit faseverschil bestaat uit de kringintegraal langsheen de gesloten lus gevormd door pad 1 en pad 2 (in de omgekeerde richting) en kan dus geschreven worden als

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot n dS = \int_S \mathbf{B} \cdot n dS = \Phi_B \tag{2.178}$$

met S het binnengebied van de gesloten lus van pad 1 en pad 2. Dit faseverschil is dus volledig bepaald door de magnetische inductie en is daardoor onafhankelijk van een ijkkeuze of een ijktransformatie. Door de magnetische flux in de spoel te variëren, kunnen we dus het faseverschil tussen de twee termen wijzigen en op die manier het interferentiepatroon veranderen. Dit is merkwaardig aangezien de elektronen zelf nooit in het gebied komen waar $\mathbf{B} \neq 0$ en dus nooit rechtstreeks het magnetisch veld 'voelen'. In de klassieke mechanica zou er dan ook geen enkel effect zijn van de aanwezigheid van een magnetisch veld $\mathbf{B} \neq 0$ in een gebied waar de deeltjes nooit komen, maar klassiek zou er natuurlijk ook geen interferentiepatroon optreden.

Dit kwantummechanische effect werd voor het eerst voorspeld door Werner Ehrenberg en Raymond E. Siday in 1949. Hun publicatie bleef echter onopgemerkt tot wanneer hetzelfde effect volledig theoretisch werd herontdekt David Bohm en Yakir Aharonov in 1959, en onmiddellijk daarop experimenteel werd bevestigd door R. G. Chambers in 1960.

Bemerk tot slot nog dat in $e^{i\Delta\alpha}$ enkel de waarde van $\Delta\alpha \bmod 2\pi$ bepaald is. Met andere woorden, een flux van de vorm

$$\Phi_B = \frac{2\pi\hbar}{e} n = \frac{h}{e} n \tag{2.179}$$

met n een geheel getal kan niet gedetecteerd worden in het Aharonov-Bohm effect, enkel het fluxoverschot $\Delta\Phi = \Phi - nh/|e|$ is meetbaar. Van zodra men het fluxoverschot $\Delta\Phi_1 = \Phi - n_1 h/|q_1|$ en $\Delta\Phi_2 = \Phi - n_2 h/|q_2|$ zou kunnen meten ten opzichte van twee ladingen q_1 en q_2 met een irrationele verhouding, is men in staat om uit de relatie $n_1|q_2| - n_2|q_1| = |q_1 q_2/h|(\Delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1)$ de twee gehele getallen n_1 en n_2 te bepalen, en bijgevolg de totale flux Φ .

Nu blijkt echter dat in de natuur alle ladingen gehele veelvoudigen zijn van een fundamentele eenheidslading e , de (absolute waarde van de) lading van het elektron. Dit heeft belangrijke gevolgen voor de interpretatie van ijktransformaties in de kwantummechanica. In het kader van de transformatie van de golffunctie met behulp van de factor $u = \exp(ie\theta/\hbar)$ ligt het binnen

de context van kwantummechanica voor de hand om de ijktransformatie voor de potentialen [Eq. (2.169)] te herschrijven als

$$V \rightarrow V - \frac{i\hbar}{e} u^{-1} \frac{\partial}{\partial t} u, \quad A \rightarrow A + \frac{i\hbar}{e} u^{-1} \nabla u. \quad (2.180)$$

Dit geeft aan dat de relevante ijkvrijheid een complexe fase u is, of dus, dus een element uit de groep $U(1)$. Meer algemeen is $U(N)$ de groep van alle complexe unitaire $N \times N$ matrices. In de kwantummechanica wordt elektromagnetisme daarom een $U(1)$ ijktheorie genoemd en de andere fundamentele interacties komen overeen met ijktheorieën met andere ijkgroepen.

Dit houdt ook in dat het fysisch perfect verantwoord is om ijktransformaties θ te beschouwen die niet eenduidig of enkelvoudig gedefinieerd zijn in de volledige ruimte, zolang de bijbehorende fase u overal enkelvoudig is gedefinieerd. Indien er deeltjes met ladingen q_1 en q_2 zouden bestaan waarvoor $|q_1/q_2|$ irrationeel is, zou dit onmiddellijk impliceren dat de ijkfunctie θ enkelvoudig gedefinieerd moet zijn. Maar aangezien alle ladingen gehele veelvoudigen blijken te zijn van de eenheidslading e , is het voldoende dat $e\theta/\hbar \pmod{2\pi}$ enkelvoudig gedefinieerd is en kan θ zelf een meervoudige definitie hebben. Dit zullen we nu gebruiken om aan te tonen dat we ladingskwantisatie kunnen verklaren als we aannemen dat er ergens in het universum een magnetische monopool bestaat.

5.4 De Dirac monopool en Dirac ladingskwantisatievoorwaarde

We hebben reeds aangehaald in Hoofdstuk 1 dat de magnetische wet van Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, niet toelaat dat er magnetische ladingen bestaan. Anders gezegd, de magnetische veldlijnen ontspringen nergens of gaan nergens naartoe, ze kunnen enkel gesloten lijnen vormen of zich oneindig uitstrekken van begin tot eind. Als we de Maxwellvergelijkingen in het vacuüm nog even in beschouwing nemen,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (2.181)$$

dan merken we dat deze vrij symmetrisch zijn onder verwisseling van elektrisch en magnetisch veld, maar om echt van een symmetrie te kunnen spreken ontbreken er vooral magnetisch bronnen (ρ^m, \mathbf{J}^m) , equivalent aan de elektrische ladings- en stroomdichtheid (ρ^e, \mathbf{J}^e) . Inderdaad, breiden we de wetten van Maxwell uit als volgt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho^e}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \mu_0 \rho^m, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\mu_0 \mathbf{J}^m, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{J}^e, \end{aligned} \quad (2.182)$$

dan leiden deze automatisch ook de behoudswet van magnetische lading

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^m + \frac{\partial \rho^m}{\partial t} = 0 \quad (2.183)$$

en zijn ze invariant onder de zogenaamde (Hodge) dualiteitstransformatie

$$\begin{aligned} E' &= E \cos \theta + c B \sin \theta \\ B' &= -\frac{1}{c} E \sin \theta + B \cos \theta \\ \rho^{e'} &= \rho^e \cos \theta + \frac{1}{c} \rho^m \sin \theta \\ \rho^{m'} &= -c \rho^e \sin \theta + \rho^m \cos \theta \\ J^{e'} &= J^e \cos \theta + \frac{1}{c} J^m \sin \theta \\ J^{m'} &= -c J^e \sin \theta + J^m \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.184)$$

Als voor alle elementaire deeltjes in het universum de verhouding tussen elektrische en magnetische lading exact even groot zou zijn, dan kunnen we via deze transformatie steeds een referentiestelsel definiëren waarin $\rho^{m'}$ en $J^{m'}$ exact gelijk zijn aan nul, zoals we gewoon zijn in experimenteel waargenomen wetten van Maxwell.

Maar wat zou er nu gebeuren als er toch een deeltje zou bestaan met enkel magnetische lading en geen elektrische lading, een zogenaamde *magnetische monopool*? We nemen dus aan dat er een magnetische monopool met lading g in de oorsprong zit. Volledig analoog als voor het elektrisch veld E ingeval van een elektrische puntlading e in de oorsprong, kunnen we schrijven dat

$$\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi r^3} \mathbf{r} = -\frac{g}{4\pi} \nabla \frac{1}{r}. \quad (2.185)$$

Daarmee vinden we inderdaad

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = g \delta(\mathbf{r}), \quad (2.186)$$

vermits $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r})$, zoals reeds eerder werd aangetoond in dit hoofdstuk.

Dirac was de eerste die zich afvroeg wat het bestaan van magnetische monopolen impliceert binnen de context van de kwantummechanica. De kwantummechanische beschrijving is gebaseerd op de elektromagnetische potentialen, die aannemen dat aan de bronloze magnetische wet van Gauss $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ blijft voldaan. Intuïtief kan een magnetische monopool het best in dit formalisme worden geïntroduceerd als de pool van een heel lange en dunne staafmagneet, of nog, als een half-oneindige en oneindig dunne spoel met eindpunt in de oorsprong en gelegen langs bijvoorbeeld de z -as. Buiten de spoel is enkel het magneetveld zichtbaar dat uit het eindpunt komt, en dit gedraagt zich zoals het veld van een vrije lading. Aangezien de integraalwet van Gauss zegt dat $\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ voor een gesloten oppervlak rond de oorsprong, volgt dat er binnen de oneindig dunne spoel een flux $\Phi = -g$ heerst die net de flux van g van het buitengebied annuleert. We willen in deze beschrijving echter dat het effect van de oneindig lange spoel onzichtbaar is, zodat we deze kunnen leggen waar we willen. Aangezien het gebied binnen de spoel oneindig dun is, heeft dit klassiek inderdaad geen enkel zichtbaar effect. Echter, dankzij de vorige paragraaf weten we dat kwantummechanische geladen deeltjes via het Aharonov-Bohm effect een magnetisch veld kunnen oppikken in een gebied waar ze zelf niet komen. Met andere woorden,

geladen deeltjes kunnen de flux in de oneindig dunne spoel meten, tenzij deze net voldoet aan $\Phi = g = h/e n$ voor een geheel getal n . Daaruit halen we de *Dirac kwantisatievoorwaarde*

$$\boxed{g e = 2\pi n \hbar}, \quad (2.187)$$

voor elektrische en magnetische lading. We zien dus dat één magnetische lading g in principe voldoende is om ervoor te zorgen dat alle elektrische ladingen enkel gekwantiseerd kunnen voorkomen.

Laat ons dit nu nog iets meer expliciet illustreren aan de hand van formules. Aangezien voor een magnetische monopool $\nabla \cdot \mathbf{B}$ nog steeds overal nul is behalve in de oorsprong, kunnen we nog steeds trachten een beschrijving $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ te behouden, maar zullen we moeten onderstellen dat de vectorpotential \mathbf{A} geen reguliere functie meer kan zijn van plaats \mathbf{x} . We kunnen inderdaad een expliciet voorschrift voor \mathbf{A} vinden in poolcoördinaten. Het blijkt dat de volgende twee keuzes inderdaad aanleiding geven tot een magnetisch veld van de vorm (2.185):

$$A_1 = \frac{g}{4\pi r} \frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta} e_\phi = \frac{g}{4\pi r} \tan(\theta/2) e_\phi \quad (2.188)$$

$$A_2 = \frac{g}{4\pi r} \frac{(-1-\cos\theta)}{\sin\theta} e_\phi = -\frac{g}{4\pi r} \cot(\theta/2) e_\phi \quad (2.189)$$

Het is duidelijk dat A_1 singulier is voor $\theta = \pi$ (dus langs de negatieve z -as) en A_2 singulier is voor $\theta = 0$ (dus langs de positieve z -as). Deze singulariteiten komen net overeen met de positie van de oneindig dunne spoel uit bovenstaande beschrijving en worden wegens hun halfoneindig karakter de Dirac-string genoemd. We wensen nu uit te drukken dat de positie van de Dirac string onobserveerbaar is, of dus dat de keuzes A_1 en A_2 tot dezelfde fysica leiden.

Het blijkt dat de overgang van A_1 naar A_2 net kunnen vatten als een ijktransformatie $A_2 = A_1 + \nabla \chi$, waarbij we de ijkfunctie nu aanduiden met χ om eventuele verwarring met de azimuth θ uit het sferisch coördinatenstelsel te vermijden. Het expliciete voorschrift dat de transformatie bewerkstelligt, is $\chi(r, \theta, \phi) = -g/(2\pi)\phi$. Deze ijktransformatie is dus niet enkelvoudig en vertoont een sprong van g in die punten in de ruimte waar $\phi = 0 = 2\pi$. Zulke ijktransformatie is echter niet in tegenstrijd zolang ze aanleiding geeft tot enkelvoudig gedefinieerde golf functies, wat exact neerkomt op de voorwaarde in vergelijking (2.187). We zien dus dat één magnetische lading g in principe voldoende is om ervoor te zorgen dat alle elektrische ladingen enkel gekwantiseerd kunnen voorkomen.

Hoewel een “echte” Dirac monopool in de vrije natuur nog niet werd waargenomen, werd in een recente Nature publicatie wel experimentele en numerieke evidentie gegeven voor een (kunstmatige) Dirac monopool aan het uiteinde van een vortex in een bepaalde Bose-Einstein condensaat setup, met eigenschappen zoals beschreven door Dirac. Voor details, zie <http://www.nature.com/nature/journal/v505/n7485/full/nature12954.html>.

We besluiten hierbij deze inleiding tot elektromagnetisme en kwantummechanica en verwijzen de geïnteresseerden graag door naar verdere cursussen.