HOOFDSTUK III : ARBEID EN ENERGIE

III.1 ARBEID

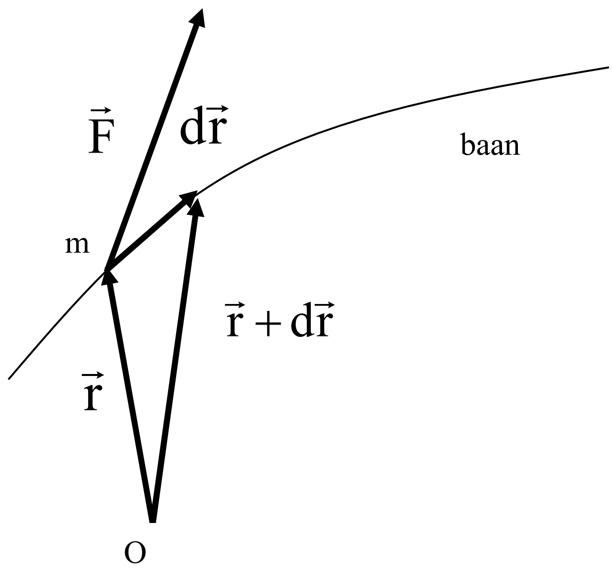
Het natuurkundig begrip arbeid (dat verschillend is van zijn fysiologische tegenhanger) wordt als volgt ingevoerd. Men beschouwt een deeltje met massa m, dat een bepaalde baan beschrijft (Fig. III.1). $\vec{F}$ is de kracht die op dit deeltje inwerkt. Gedurende de tijd dt verplaatst het deeltje zich over $d\vec{r}$. De (elementaire) arbeid geleverd door de kracht $\vec{F}$ gedurende deze verplaatsing, wordt in de fysica gedefinieerd door het scalair product :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,|\,d\vec{r}\,|\cos\theta = F ds \cos\theta \qquad (3.1)$$

Hierin zijn F en ds de grootte van respectievelijk $\vec{F}$ en $d\vec{r}$.

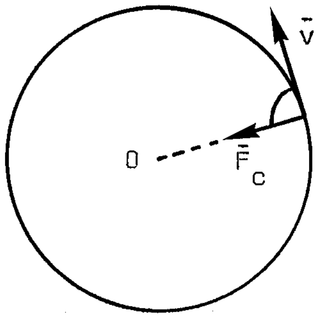
Bij een eindige verplaatsing dient hiervan de integraal te worden genomen :

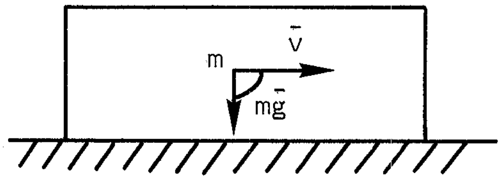
$$\int_1^2 \vec{F}.d\vec{r} \qquad (3.2)$$



Figuur III. 1

Volgens de fysica levert een man die een gewicht (stil) boven het hoofd houdt geen arbeid ($d\vec{r}$ = 0) ondanks zijn duidelijke inspanning. De arbeid is eveneens nul indien de kracht loodrecht op de verplaatsing staat. Dit is bijvoorbeeld het geval bij de centripetale kracht die verantwoordelijk is voor een eenparige cirkelvormige beweging en bij de zwaartekracht wanneer de verplaatsing horizontaal is (Fig. III.2).





Figuur III.2

Wanneer een lichaam met een constante snelheid beweegt o.i.v. van 2 gelijke maar tegengestelde krachten (bijv. aandrijvende kracht en een wrijvingskracht) is $\vec{F}_{tot} = 0$ en is de arbeid geleverd door het geheel van krachten eveneens gelijk aan nul. De aandrijvende kracht levert een positieve arbeid, terwijl de wrijvingskracht negatieve arbeid levert. Deze wrijvingskrachten doen "warmte" ontstaan.

De arbeid is het product van een kracht en een verplaatsing en wordt in het S.I.-stelsel uitgedrukt in newton.meter (Nm) of joule (J).

III.2 HET VERMOGEN

Bij praktische toepassingen is het ook van belang te weten hoe snel, met welk tempo, door een systeem arbeid verricht wordt. Het door de krachten geleverde vermogen P op een bepaald ogenblik wordt gedefinieerd door :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\vec{v} \tag{3.3}$$

Het vermogen is dus de arbeid geleverd per seconde.

De eenheid van vermogen is equivalent met één joule per seconde. Deze eenheid wordt de watt (W) genoemd.

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J}/1 \text{ s}$$

III.3 DE KINETISCHE ENERGIE

Zoals hierboven besproken, is het vermogen geleverd door een kracht $\vec{F}$ gegeven door

$$P = \vec{F}.\vec{v} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.\frac{d\vec{r}}{dt} = m(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt})$$

$$= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}[(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2] \qquad (3.4)$$

$$= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2] = \frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} \qquad \text{daar} \qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Door integratie naar de tijd t bekomt men :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} Pdt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}dt = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 d(\frac{mv^2}{2}) \qquad (3.5)$$

De tussen de punten 1 en 2 door de kracht $\vec{F}$ geleverde arbeid W is dus gegeven door :

$$W = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad (3.6)$$

In deze betrekking zijn v_2 en v_1 de snelheden in de respectievelijke punten 1 en 2. De uitdrukking $\frac{mv^2}{2}$ noemt men de kinetische energie :

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} \qquad (3.7)$$

Formule (3.6) is een zeer belangrijke stelling en leert dat de arbeid geleverd door een kracht $\vec{F}$ terug te vinden is in de verandering van de kinetische energie van het lichaam. De geleverde arbeid wordt omgezet in kinetische energie. De kinetische energie wordt eveneens uitgedrukt in Joule.

III.4 DE POTENTIELE ENERGIE

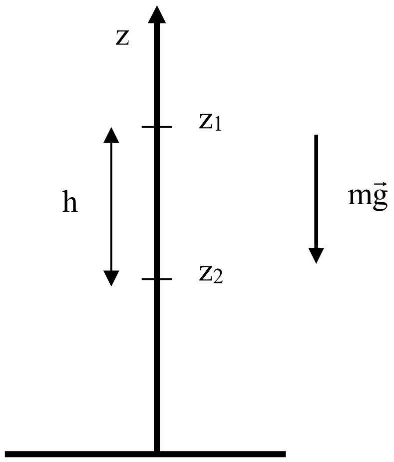
Beschouwen we de arbeid geleverd door de zwaartekracht bij de valbeweging (Fig. III.3).

$$\vec{F} = -mg\vec{e}_z$$

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 mgdz \qquad (3.8)$$

$$= -[mgz]_1^2 = -mg(z_2 - z_1) = mgz_1 - mgz_2$$

Nu is wegens (3.6) de geleverde arbeid ook gelijk aan het verschil in kinetische energie :



Figuur III. 3

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mgz_1 - mgz_2 \tag{3.9}$$

Men kan ook schrijven :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 \tag{3.10}$$

Hieruit volgt dat tijdens de valbeweging de grootheid

$$mgz + \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.11}$$

constant blijft.

De uitdrukking mgz noemt men de potentiële energie van het deeltje met massa m in het zwaartekrachtsveld van de aarde.

Uit de betrekking (3.11) volgt dat de totale energie, dit is kinetische plus potentiële energie, constant blijft. Men spreekt van de wet van behoud van mechanische energie.

Deze wet is algemeen geldig in geval van "<u>conservatieve krachten</u>". Onderstel dat men te doen heeft met een kracht die kan afgeleid worden uit een potentiële energiefunctie U(x,y,z) door de betrekking :

$$\vec{F} = -\text{grad}U \tag{3.12}$$

Hierin is U alleen een functie van de coördinaten x, y, z (en niet van de snelheidscomponenten of van t).

De componenten van de kracht worden gegeven door :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{3.13}$$

Berekenen we nu de arbeid geleverd bij een verplaatsing tussen de punten met plaatsvector $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} &= -\int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) \\ &= -\int_1^2 dU = -U(x_2, y_2, z_2) + U(x_1, y_1, z_1) \\ &= U_1 - U_2\end{aligned} \tag{3.14}$$

In dit geval kan de geleverde arbeid uitgedrukt worden als een verschil van een functie U(x,y,z) in het eindpunt en in het beginpunt. In deze berekening werd ondersteld dat U niet expliciet van t afhangt ($\frac{\partial U}{\partial t} = 0$). De geleverde arbeid hangt dan alleen af van het begin- en het eindpunt en is onafhankelijk van de gevolgde weg. Voor een dergelijk stelsel geldt dan, vermits de geleverde arbeid gelijk is aan de toename van kinetische energie, dat

$$E_{kin} + U = \text{constante} \tag{3.15}$$

Wanneer de krachten dus door formule (3.12) kunnen afgeleid worden uit een potentiële energiefunctie U, geldt de wet van behoud van kinetische plus potentiële energie. Merken we op dat U slechts bepaald is op een constante na (mgz werd bijv. arbitrair nul gekozen voor z = 0, aan het aardoppervlak). In andere systemen (niet-conservatieve) heeft men naast krachten die kunnen afgeleid worden uit een potentiële energie ook krachten die deze eigenschap niet bezitten. Wrijvingskrachten die afhangen van de snelheden zijn hier een voorbeeld van. In een dergelijk geval is in het algemeen E_{kin} + U niet meer constant tijdens de beweging. De wet van behoud van energie blijft geldig maar dan dienen andere vormen van energie, zoals warmte, in acht genomen te worden. Algemeen geldt in de fysica de wet van behoud van energie. Voor het bijzondere geval van een conservatief systeem is de som van kinetische en potentiële energie constant. Men zegt ook dat de <u>mechanische energie</u>, dit is dan kinetische plus potentiële energie, <u>constant</u> is in een <u>conservatief stelsel</u>. Wanneer men een systeem van verscheidene lichamen beschouwt, dan geldt nog altijd de wet van behoud van energie voor het gezamenlijk systeem. De energie van ieder deeltje afzonderlijk blijft dan niet noodzakelijk constant, maar er is een uitwisseling van energie tussen de deeltjes. Bij wisselwerking tussen deeltjes treedt dus naast de uitwisseling van impuls ook de uitwisseling van energie op.

Het is gemakkelijk na te gaan dat U = mgz voldoet aan (3.12).

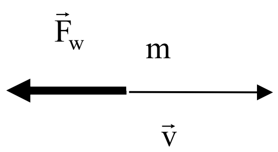
$$-\text{grad}U = -mg\,\text{grad}z = -mg\frac{\partial z}{\partial z}\vec{e}_z = m\vec{g} \qquad \square \tag{3.16}$$

Zoals hierboven vermeld, zijn niet-conservatieve krachten bijv. wrijvingskrachten die van de snelheid afhangen :

$$\begin{aligned} &\vec{F}_w = \vec{F}_w(\vec{v}) \\ &F_w(v) = F_w(0) + \left(\frac{dF_w}{dv}\right)_0 \frac{v}{1!} + \ldots = Av + Bv^2 + \ldots \end{aligned} \tag{3.17}$$

Daar $F_w(0) = 0$ leidt dit bij niet al te hoge snelheden uiteindelijk tot de vaak gebruikte vorm :

$$\vec{F}_w = -\alpha\vec{v} \text{ met } \alpha > 0 \tag{3.18}$$

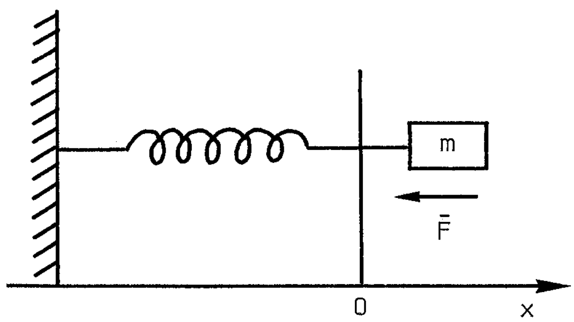


Figuur III. 4

III.5 TOEPASSING VAN DE WET VAN BEHOUD VAN ENERGIE IN CONSERVATIEVE STELSELS – WET VAN HOOKE

De potentiële energie van de kracht uitgeoefend door een uitgerekte veer

De massa van de veer wordt als verwaarloosbaar ondersteld. De kracht die op de massa door de veer uitgeoefend wordt, is gegeven door de wet van Hooke.



Figuur III. 5

$$\vec{F} = -kx\vec{e}_x \tag{3.19}$$

Hierbij werd verondersteld dat x = 0 correspondeert met de evenwichtsstand voor m onder invloed van de veer. Deze kracht is af te leiden uit een potentiële energie :

$$U = \frac{kx^2}{2} \tag{3.20}$$

daar

$$\vec{F} = -\text{grad}U = -\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x}\frac{kx^2}{2} = -kx\vec{e}_x \tag{3.21}$$

Daar $\vec{F}$ een conservatieve kracht is, moet de wet van behoud van energie gelden :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = c^{te} \tag{3.22}$$

Men kan deze betrekking eveneens terugvinden uitgaande van de bewegingsvergelijking **:**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3.23}$$

Deze differentiaalvergelijking heeft als oplossing :

$$x = a\sin(\omega t + \phi) \qquad \text{met} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.24}$$

Hierin zijn a en ϕ arbitraire constanten.

$$\begin{gathered} v = \frac{dx}{dt} = \omega a\cos(\omega t + \phi) \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\cos^2(\omega t + \phi) \\ \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega t + \phi) \end{gathered} \tag{3.25}$$

De totale energie is dus

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega t + \phi) \\ \omega^2 = \frac{k}{m} \\ E_{tot} = \frac{1}{2}ka^2[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] \\ E_{tot} = \frac{1}{2}ka^2 = cte \end{gathered} \tag{3.26}$$

Deze constante is gelijk aan de maximale kinetische energie en eveneens gelijk aan de maximale potentiële energie.

Applets (volledig facultatief maar nuttig)

http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109N/more_stuff/Applets/Collision/jarapplet.html
http://www.walter-fendt.de/ph14nl/collision_nl.htm
http://www.walter-fendt.de/ph14nl/inclplane_nl.htm
http://www.walter-fendt.de/ph14nl/ncradle_nl.htm

Vraagstukken

1. Een lichaam met een massa van 2 kg valt vanaf een hoogte van 5 m op een zandhoop waarin het 7,5 cm doordringt alvorens tot stilstand te komen. Welke constante kracht oefende het zand uit ? In het zandgedeelte mag de zwaartekracht verwaarloosd worden. (F = 1308 N).
2. Op een deeltje werkt een kracht $\overline{F} = (y^2 + x^2)\overline{e}_x - 2xy\overline{e}_y$.

   Bereken de arbeid van de kracht uitgeoefend op het deeltje als dit beweegt van (0,0) tot (3,5) langs elk van de volgende wegen:

   a) langs de x-as van (0,0) tot (3,0) en vervolgens evenwijdig met de y-as tot (3,5)

   b) langs de y-as van (0,0) tot (0,5) en vervolgens evenwijdig met de x-as tot (3,5)

   c) langs een rechte lijn door beide punten.

   (a) – 66 J ; b) 84 J ; c) – 16 J)

*3. Een deeltje beweegt onder invloed van een aantrekkende kracht $F = -\dfrac{k}{r^2}$ in een cirkel met straal r. Bewijs dat de totale energie $E = -\dfrac{k}{2r}$ is, dat de snelheid $v = \left(\dfrac{k}{mr}\right)^{1/2}$ en dat het impulsmoment $L = (m\,k\,r)^{1/2}$ is. De potentiële energie werd nul gekozen op oneindig.

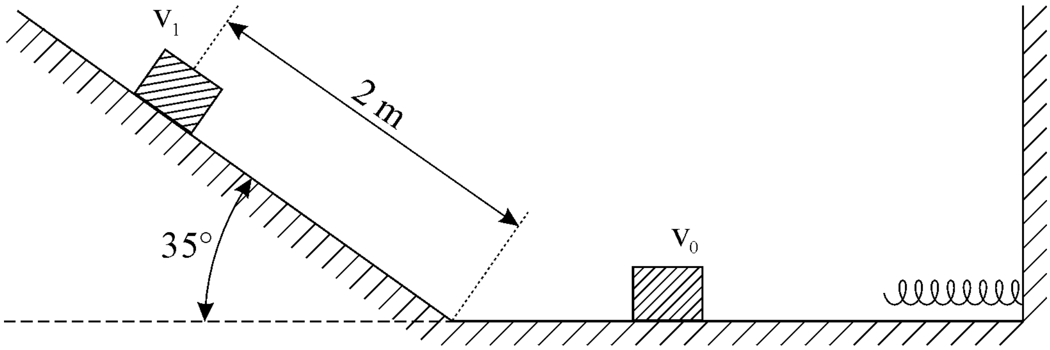
4. Een blok met massa m oorspronkelijk in rust, bevindt zich op een hoogte h boven een verticaal opgestelde veer met krachtconstante k. Vind de maximale verplaatsing y die het bovenuiteinde van de veer uitvoert als het blok op de veer valt.
5. Een deeltje beweegt onder invloed van een krachtveld dat beschreven wordt door een van de volgende functies voor de potentiële energie:

   a) $U = a\,x^3$; b) $U = b\,y^4$; c) $U = C\,x\,y$

   d) $U = k(x^2 + y^2 + z^2)$; e) $U = xy + yz + zx$

Druk de kracht in elk geval in vectoren uit.

*6. Een ideale veer kan 2 cm samengeperst worden met een kracht van 100 N. Een lichaam met massa m = 1 kg wordt tegen de veer geplaatst en deze wordt dan 10 cm ingedrukt en losgelaten.
De massa wordt weggestoten langs een wrijvingsloos horizontaal oppervlak eindigend in een wrijvingsloos hellend vlak dat een hoek van 35° maakt met de horizontale (zie Fig.).
a) Wat is de snelheid v_o van het lichaam op het horizontaal stuk ?
b) Wat is de snelheid v_l van het lichaam nadat het 2 m afgelegd heeft op het hellend stuk ?
c) Hoeveel meter wordt er afgelegd op het hellend deel vooraleer het lichaam tot rust komt ?
(v_o = 7,1 ms^{-1} ; v_l = 5,2 ms^{-1} ; d = 4,4 m).



*7. Bereken de arbeid die nodig is om een massa van 1 kg van de aarde naar de maan te brengen. Hierbij mag de luchtweerstand verwaarloosd worden.
$R_A = 6{,}37.10^6$ m, $R_M = 1{,}74.10^6$ m, $g_M = 0{,}6$ g, $R_{AM} = 60\ R_A$.
($51{,}2.10^6$ J).

8. Een kunstmaan, massa 500 kg, beweegt in een cirkelbaan op 350 km boven het aardoppervlak. Bereken haar snelheid, omlooptijd en centripetale versnelling. Bereken de arbeid die moet geleverd worden om haar in deze baan te brengen (zonder E_{kin}).
(7704 ms^{-1} ; $5{,}48.10^3$ s ; 8,83 ms^{-2} ; $1{,}63.10^9$ J).

9. Een tractor trekt een last van 400 kg. De ketting van deze tractor naar de last maakt een hoek van 30° met de horizontale en ondergaat een kracht van 120 N. Hoeveel arbeid dient de tractor te leveren om de last over een afstand van 25 m te verplaatsen ?
(2.600 J).

10. Er wordt water uit een kelder gepompt. De vloer is 50 m^2 en het water staat 1,5 m hoog. Het hoogteverschil tussen vloer en straat is 5 m.
Bereken de arbeid.
($3{,}13.10^6$ J).

11. Een veer van 30 cm lang heeft een krachtconstante van 0,5 Nm^{-1}. Hoeveel arbeid is er nodig om de veer van 35 tot 40 cm uit te rekken ?
    ($1{,}9.10^{-3}$ J).
12. Het wereldrecord polsstokspringen was ooit 5,3 m. Het zwaartepunt van de springer bevond zich voor de sprong 1 m boven de grond. Tijdens het springen ging het zwaartepunt 25 cm onder de lat door. Bereken de loopsnelheid van de springer in de onderstelling dat hij al zijn kinetische energie in potentiële energie kon omzetten.
    (8,9 ms^{-1}).
13. Met welke snelheid v zal een man beginnen bewegen wanneer hij staande op zeer glad ijs, een kogel afschiet in horizontale richting ? De massa van man + geweer + kogel is 70 kg. De massa van de kogel is 10 g en deze vertrekt met een snelheid van 700 ms^{-1}.
    (0,1 ms^{-1}).
14. Een meteoriet is aanvankelijk in rust op een afstand van het middelpunt van de aarde gelijk aan zesmaal de straal van de aarde. Met welke snelheid bereikt hij het aardoppervlak ? ($R_A = 6{,}37.10^6$ m).
    (10.200 ms^{-1}).
15. Een lichaam met massa m wordt verticaal opwaarts gelanceerd met beginsnelheid v_0. Vind een uitdrukking die een verband geeft tussen de snelheid en de afstand tot het middelpunt van de aarde als men hoogten bereikt waarop g niet meer constant mag beschouwd worden.
16. Een geweerkogel van 10 g en snelheid v_o = 800 ms^{-1} wordt gestopt door een houten blok op een afstand van 0,3 m. Onderstel een uniforme vertraging van de kogel in het blok. Het blok heeft een massa van 25 kg en kan glijden zonder wrijven op een horizontaal vlak.
    Zoek a) de uiteindelijke impuls van het blok dat oorspronkelijk in rust was
    b) de snelheid van het blok
    c) de tijd nodig om de kogel te stoppen
    d) de kracht op het blok tijdens de botsing
    (a) 8 kg ms^{-1} ; b) 0,32 ms^{-1} ; c) $7{,}5.10^{-4}$ s : d) $1{,}1.10^4$ N)