# Voorwoord

Deze cursusnota's horen bij het opleidingsonderdeel *Discrete Wiskunde I* uit de eerste Bachelor wiskunde. Alles wat aan bod zal komen tijdens de theorielessen, is bevat in deze nota's. De student kan dus steeds op deze nota's terugvallen indien er onduidelijkheden zijn. Naast de theorielessen zijn er ook praktische oefeningen onder begeleiding voorzien. Het materiaal dat in de oefeningenlessen aan bod komt, zal eveneens via het elektronisch leerplatform aangeboden worden.

*De bachelor wiskunde beheerst de basiselementen van de wiskunde, kan zelfstandig nieuwe vakkennis verwerven en ze integreren in reeds opgedane kennis en vaardigheden.* Dit is één van de eindcompetenties in de bacheloropleiding wiskunde. Willen we deze competentie bereiken, dan moeten we, vanaf dag één in de opleiding, de wiskunde onderwijzen zoals ze is: als een abstracte wetenschap waarin een uitspraak slechts een stelling genoemd wordt als ze bewezen is. Wiskunde is dus geen kookboek, het is niet een lijst met recepten om bepaalde problemen, die vandaag toevallig hip zijn, op te lossen. Wiskunde biedt echter zeer veel inzicht in structuren die model kunnen staan voor de omgeving waarin een probleem omschreven wordt, en aldus kan de wiskundige voor specifieke problemen een oplossing bedenken. Dit feit ligt trouwens aan de basis van de eeuwenlange, uiterst succesvolle wisselwerking tussen wiskunde en natuurkunde, en ook andere wetenschappen.

We merken dat de instromende studenten minder beschikken over abstracte kennis, terwijl er in de cursussen zoals Analyse en Lineaire algebra en analytische meetkunde, soms een zekere (abstracte) voorkennis verondersteld wordt. Om de voorkennis van de instromende studenten op hetzelfde peil te brengen, werd in 2008 geleden het vak *Relaties en Structuren* ingevoerd in het programma. Sinds de meest recente hervorming van het bachelorprogramma in 2014, werd ook een zeer duidelijke leerlijn *discrete wiskunde* ingevoerd. Het vak Relaties en Structuren werd uitgebreid en omgevormd tot *Discrete Wiskunde I*, waarbij de bovenvermelde doelstelling behouden werd. Voor deze cursus veronderstellen we eigenlijk geen voorkennis. Een aantal *algebraïsche structuren* die steeds terugkeren in de opleiding, komt aan bod. Daarnaast hebben we aandacht voor een aantal combinatorische technieken, en een inleiding tot de elementaire getaltheorie. De hoofdstukken over voortbrengende functie en recurrente betrekkingen ronden de cursus af en markeren deze cursus onmiskenbaar als een basiscursus discrete wiskunde. We behandelen alles op een strikt wiskundige manier. Alle eigenschappen waarvan we vinden dat de student ze na het volgen van deze cursus moet beheersen, worden *bewezen*. Stelling en bewijs spelen dus een belangrijke rol.

Deze cursusnota's zijn het resultaat van vele collega's. Zij zijn eerst en vooral gebaseerd op de cursusnota's van de vroegere vakken *Relaties en Structuren* en *Discrete Wiskunde* (uit de bacheloropleiding informatica), geschreven door Frank De Clerck. Hoofdstukken 1 en 2 (met drie appendices) zijn door Bert Seghers heel grondig herschreven, en dit op een zeer voortreffelijke wijze. Hoofdstukken 6 en 7 tenslotte zijn gebaseerd op de corresponderende hoofdstukken uit de cursus Discrete Wiskunde van Tom De Medts (uit de bacheloropleiding informatica). De huidige tekst werd mij ter beschikking gesteld door de vroegere titularis Jan De Beule van dit opleidingsonderdeel. Vele suggesties ter verbetering van deze tekst werden mij gegeven door Maarten De Boeck. Ik wens mijn hartelijke dank uit te drukken aan al deze collega's voor hun werk aan deze cursusnota's en voor het ter beschikking stellen van deze cursusnota's.

Leo Storme
september 2016

# Leidraad

Moet er in een studie wiskunde *van buiten geleerd worden*? Dit is een zeer interessante vraag. In het voorwoord verwezen we reeds naar één van de eindcompetenties van de bachelor wiskunde: *De bachelor wiskunde beheerst de basiselementen van de wiskunde, kan zelfstandig nieuwe vakkennis verwerven en ze integreren in reeds opgedane kennis en vaardigheden.* Het vak Discrete Wiskunde I is bij uitstek een vak over basiselementen van de wiskunde. Er mag dus verwacht worden dat de student, na het volgen van dit vak, en na het gedurende enige tijd studeren van dit vak, de in de cursus aanwezige basiselementen beheerst. Hoeveel uren er *precies* gestudeerd moeten worden, is van student tot student verschillend, en daarop kan deze leidraad geen antwoord geven.

Deze nota's bevatten heel wat informatie. Een gedeelte daarvan is essentieel. Dat wil zeggen dat er verwacht wordt dat de student deze essentiële informatie *vlot beheerst.* Definities, lemma's, stellingen en gevolgen zijn allemaal essentieel, en hebben een opvallende vormgeving meegekregen:

**Definitie 0.1**

Dit is een definitie van een bepaalde *structuur*.

**Lemma 0.2**

Zonder dit lemma, kan de volgende stelling niet bewezen worden.

**Stelling 0.3**

Dit is een belangrijke stelling.

**Gevolg 0.4**

Dit is een gevolg van de vorige stelling.

Er wordt verwacht dat de student essentiële informatie kan reproduceren. Dit betekent, in zekere zin, dat deze informatie van buiten geleerd kan worden. Beter nog probeert de student eerst voldoende inzicht te verwerven in de materie, onder andere door een aantal praktische oefeningen te maken. Nadien zal de student inderdaad voldoende studietijd moeten investeren om de essentiële informatie te memoriseren. Dank zij het verworven inzicht kan dit systematisch gebeuren, en is er geen sprake meer van *van buiten leren*. Zo goed als alle lemma's, stellingen en gevolgen worden *bewezen*. Naast de parate kennis van de lemma's, stellingen en gevolgen, wordt er uiteraard verwacht dat de student de bewijzen kan reproduceren. Ook hier geldt dat hoe beter het inzicht in het bewijs is, des te gemakkelijker dit gememoriseerd kan worden. Bewijzen die correct zijn, maar anders dan in de cursus, worden onvoorwaardelijk goed gerekend. Elk bewijs is in de tekst duidelijk gemarkeerd. Het begin van een bewijs wordt toepasselijk aangegeven door *Bewijs.*, het einde door de *halmos*: □, welke de traditionele afkorting *QED* vervangt.

Op sommige plaatsen in de nota's is er nogal wat bijkomende informatie te vinden. Deze dient in de eerste plaats om de essentiële informatie te verduidelijken, onder andere door middel van voorbeelden. Er wordt niet verwacht dat de student alle voorbeelden kan reproduceren. Eerder kunnen er vragen gesteld worden over de voorbeelden. In elk geval zal er ten gepaste tijde een volledig overzicht gegeven worden van de materie die als te kennen beschouwd wordt, en de materie waar er op het examen geen vragen over gesteld zullen worden.

Tijdens het mondeling examen wordt er dus van de student verwacht dat er vlot antwoord gegeven kan worden op de gestelde vragen. Dit mondeling examen geschiedt echter met een grondige schriftelijke voorbereiding, waarvoor er voldoende tijd gegeven wordt. De bedoeling van het mondeling examen is om in te pikken op de schriftelijke voorbereiding, en kleine, bijkomende vragen te stellen, om aldus te peilen naar het inzicht in de materie, én om de student de kans te geven om onvolkomenheden of fouten recht te zetten.

Een gedeelte van de lestijden wordt ingevuld door oefeningenlessen onder begeleiding. Ook voor dit gedeelte is er een examen voorzien, dat volledig schriftelijk afgenomen wordt. Ook voor dit schriftelijk examen wordt de student verondersteld om de essentiële materie voldoende te beheersen. Het oefeningenexamen is dus eveneens onder gesloten boek.

# Inhoudsopgave

Hoofdstuk

# 3 Combinatoriek

De kardinaliteit van een eindige verzameling is een natuurlijk getal. Combinatoriek kan men zien als de studie van aritmetische verbanden tussen de kardinaliteiten van eindige verzamelingen.

## 3.1 Elementaire principes

**Ladenprincipe van Dirichlet, duivenhokprincipe**

Als $n+1$ objecten verdeeld moeten worden over $n$ laden, dan zal minstens één lade meer dan één object bevatten.

Alhoewel dit een eenvoudig principe is, zijn er heel wat toepassingen te bedenken van dit principe.

1. In elke verzameling van ten minste 13 mensen, zijn er ten minste 2 die verjaren in dezelfde maand.
2. In elke groep mensen zijn er steeds 2 mensen te vinden die evenveel vrienden in de groep hebben. (We veronderstellen wel dat de vriendschap wederkerig (dus symmetrisch) is en, afhankelijk van het standpunt of een persoon bevriend kan zijn met zichzelf of niet, reflexief of antireflexief.)

Dit tweede voorbeeld is, in tegenstelling tot het eerste, niet triviaal. Inderdaad, noem $X$ de groep mensen, en noem $f$ een afbeelding van $X$ naar $\mathbb{N}$, zodanig dat $f(x)$ het aantal vrienden van $x \in X$ is. Als $|X| = m$, dan kan $f(x)$ de waarden $0, 1, \ldots, m-1$ aannemen. Met andere woorden, het waardegebied van $f$ is een deelverzameling van $\mathbb{N}_{<m}$. Om het ladenprincipe te kunnen toepassen, moeten we echter nog bewijzen dat het waardegebied een eigenlijke deelverzameling is van $\mathbb{N}_{<m}$. Merk echter op dat, indien er een

persoon $a$ is die $m-1$ vrienden heeft (met andere woorden alle personen uit $X$ zijn vrienden van $a$), dan is er geen enkel persoon uit $X$ zonder vrienden, dus in dit geval is 0 geen element van de waardeverzameling van $f$, en omgekeerd als 0 tot de waardeverzameling behoort, dan zal $m-1$ er niet toe behoren. Bijgevolg is de waardeverzameling een echte deelverzameling van $\mathbb{N}_{<m}$ en heeft dus ten hoogste $m-1$ elementen. Nu kunnen wij het ladenprincipe toepassen en er zijn dus ten minste 2 mensen $a$ en $b$ uit de groep waarvoor geldt dat $f(a) = f(b)$. Daarmee is de uitspraak aangetoond.

### Het somprincipe

Dit principe is evenals het ladenprincipe elementair. We formuleren het als een stelling.

**Stelling 3.1**

*Als $A_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ $k$ twee aan twee disjuncte, eindige verzamelingen zijn, dan is*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

*Bewijs.* Dit principe kan eenvoudig bewezen worden door te steunen op het inductieprincipe. □

Het somprincipe geeft ons de mogelijkheid om het ladenprincipe in een meer algemene vorm te formuleren.

**Veralgemeend ladenprincipe**

Indien $m$ objecten over $n$ laden moeten verdeeld worden waarbij $m > nr$, dan is er ten minste één lade die meer dan $r$ objecten bevat.

## 3.2 Het principe van de dubbele telling

Veronderstel dat $X$ en $Y$ twee eindige verzamelingen zijn met $|X| = n$ en $|Y| = m$ en $S$ een willekeurige deelverzameling van $X \times Y$. Indien we nu de kardinaliteit van deze eindige verzameling $S$ willen bepalen, dan kunnen wij op twee manieren te werk gaan. Men kan met name eerst alle koppels tellen die een welbepaalde $x$ als eerste element bevatten. Noem $r_x(S)$ het aantal koppels in $S$ die $x$ als eerste element bevatten. Dan is

$$|S| = \sum_{x \in X} r_x(S).$$

Noem anderzijds $k_y(S)$ het aantal koppels in $S$ die $y$ als tweede element bevatten. Dan is

$$|S| = \sum_{y \in Y} k_y(S).$$

Deze telmethode, het principe van de dubbele telling genoemd, is op het eerste zicht zeer eenvoudig, maar heeft heel wat toepassingen. Wij vatten deze methode in de volgende stelling samen.

**Stelling 3.2**

Indien $X$ en $Y$ twee eindige niet-ledige verzamelingen zijn, en indien $S$ een deelverzameling is van $X \times Y$, dan gelden volgende eigenschappen.

$$|S| = \sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} k_y(S).$$

**Gevolg 3.3**

Stel $S \subset X \times Y$, $X$ en $Y$ twee eindige niet-ledige verzamelingen.

1. Indien $r_x(S)$ een constante $r$ is, onafhankelijk van de keuze van $x \in X$, en indien $k_y(S)$ een constante $k$ is, onafhankelijk van de keuze van $y \in Y$, dan is

   $$r|X| = k|Y|.$$

2. De orde van $X \times Y$ wordt gegeven door

   $$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

## 3.3 Het eenvoudig inclusie–exclusie principe

Dit principe is een uitbreiding van het somprincipe. In zijn eenvoudigste versie kan men dit principe als volgt formuleren:

**Eenvoudig inclusie-exclusie principe**

*Als $A$ en $B$ twee eindige verzamelingen zijn, dan vindt men het kardinaalgetal van de unie van $A$ en $B$ als de som van de kardinaalgetallen van $A$ en van $B$ waarvan men het aantal elementen van de doorsnede van beide verzamelingen aftrekt*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| .$$

We komen later terug op een algemene versie van dit principe.

**Voorbeeld 3.4.** *Hoeveel natuurlijke getallen van* 1 *tot* 1000 *zijn niet deelbaar door* 3 *of* 7*?* **Oplossing.** Noteer $V_3$ en $V_7$ voor de verzamelingen van de drievouden, resp. de zevenvouden, kleiner dan of gelijk aan 1000. Het antwoord op de vraag wordt gegeven door

$$1000 - |V_3 \cup V_7|$$

(ook al een inclusie/exclusie toepassing). Blijft nu het bepalen van $|V_3 \cup V_7|$. Het is duidelijk dat $|V_3| = 333$ en dat $|V_7| = 142$. Verder geldt eveneens $V_3 \cap V_7 = V_{21}$ (de verzameling van de 21-vouden) en $|V_{21}| = 47$. Het antwoord op de vraag vinden we dus als

$$1000 - (333 + 142 - 47) = 572.$$

■

## 3.4 Combinatieleer

Traditioneel wordt onder *combinatieleer* het tellen van al dan niet geordende $k$-tallen verstaan. Hierbij kunnen in deze $k$-tallen al dan niet herhalingen optreden. We geven hier een kort overzicht van deze theorie.

### 3.4.1 Variaties

**Voorbeeld 3.5.** Een voetbaltoernooi wordt door 4 ploegen gespeeld (we noemen ze $a, b, c, d$). Telkens wordt een thuis– en een uitwedstrijd gespeeld. Veronderstel dat we met $ab$ noteren dat de ploeg $a$ als thuisploeg speelt tegen de ploeg $b$ (als uitploeg). Hoeveel wedstrijden moeten er dan gespeeld worden?

Er wordt dus gevraagd naar het aantal koppels bestaande uit verschillende elementen, die we kunnen maken uit de verzameling $X = \{a, b, c, d\}$. In dit geval zijn deze koppels eenvoudig uit te schrijven. Het zijn er 12, met name

$$\begin{array}{cccc} ab & ba & ca & da \\ ac & bc & cb & db \\ ad & bd & cd & dc \end{array}$$

**Definitie 3.6**

Een *variatie van $k$ elementen uit $n$ elementen* is een **geordend** $k$–tal van $k$ **verschillende** elementen gekozen uit een gegeven **verzameling** van $n$ elementen.

Het totaal aantal variaties van $k$ elementen uit $n$ elementen noteren we door $V_n^k$ of nog door $P(n, k)$.

**Opmerkingen**

1. Het is duidelijk dat $k \leq n$; $k \in \mathbb{N}$ en $n \in \mathbb{N}$. Hierbij veronderstellen we stilzwijgend dat indien $k = 0$, $V_n^0 = 1$.
2. Twee verschillende variaties van $k$ elementen uit $n$ elementen kunnen dus verschillend zijn
   - door de opgenomen elementen;
   - door de volgorde van de elementen.

**Stelling 3.7**

Er geldt $V_n^k = n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

*Bewijs.* Aangezien de volgorde van belang is, en aangezien een element geen 2 maal in een variatie kan voorkomen, kunnen we als volgt te werk gaan. We kiezen eerst het eerste element, dat kan op $n$ verschillende manieren, eens het eerste element gekozen, blijven er nog $n-1$ manieren over om het tweede element te kiezen, waarna er nog $n-2$ manieren zijn om het derde element te kiezen. Indien wij zo verder gaan, zullen er voor de laatste keuze (met name de $k^{\text{de}}$ keuze) nog $n-(k-1)$ kandidaten overblijven. In het totaal zijn er dus $n(n-1)\cdots(n-(k-1))$ mogelijke variaties van $k$ elementen uit $n$ elementen. □

### 3.4.2 Permutaties

**Definitie 3.8**

Een variatie van $n$ elementen uit $n$ elementen, wordt een *permutatie* genoemd.

Met andere woorden, een permutatie is een geordend $n$-tal van $n$ verschillende elementen. Twee permutaties van $n$ elementen zijn dus verschillend door de **volgorde** van de elementen. Het is duidelijk dat het aantal permutaties van $n$ elementen gelijk is aan

$$P(n,n) = n(n-1)(n-2)\ldots 4\cdot 3\cdot 2.$$

Zoals we reeds vroeger gezien hebben, wordt dit aantal kort voorgesteld door $n!$ ($n$ faculteit).

**Opmerkingen**

1. We spreken af dat 0!=1.
2. Uit de formule van het aantal variaties van $k$ elementen uit $n$ elementen volgt duidelijk dat dit kan geschreven worden als

   $$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

   Merk terloops op dat, indien we $k=0$ stellen in de bovenstaande formule, $V_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$, hetgeen de afspraak $V_n^0 = 1$ rechtvaardigt. Anderzijds is $0! = 1$ in overeenstemming met

   $$V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

3. Het woord permutatie is uiteraard goed gekozen. Inderdaad, een permutatie van $n$ elementen is niets anders dan een bijectie van een verzameling met $n$ elementen op zichzelf. De verzameling van alle permutaties van een verzameling met $n$ elementen stellen we voor door $S_n$.

### 3.4.3 Combinaties

**Voorbeeld 3.9.** Veronderstel dat bij het voetbaltoernooi tussen de 4 ploegen $a, b, c, d$ telkens slechts 1 wedstrijd (op neutraal terrein) wordt gespeeld. In dit geval speelt de volgorde dus geen rol. We zoeken in dit geval nu naar het aantal **paren** uit de verzameling van 4 elementen. Dit aantal is uiteraard 6.

**Definitie 3.10**

Een *combinatie van $k$ elementen uit $n$ elementen* is een **deelverzameling** met $k$ elementen uit een gegeven verzameling van $n$ elementen.

Het aantal combinaties van $k$ elementen uit $n$ elementen stellen we voor door $\binom{n}{k}$ of $C(n, k)$. Deze getallen worden ook nog de *binomiaalgetallen* of de *binomiaalcoëfficiënten* genoemd.

**Stelling 3.11**

Er geldt $V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k! \quad (n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n)$.

*Bewijs.* Een willekeurige variatie van $k$ elementen uit $n$ elementen ontstaat door eerst een deelverzameling met $k$ elementen uit de verzameling van deze $n$ elementen te nemen, en dit kan op $\binom{n}{k}$ manieren, en daarna de volgorde van de $k$ elementen in deze deelverzameling vast te leggen. We kunnen deze $k$ elementen op $k!$ manieren permuteren, m.a.w. we kunnen deze $k$ elementen op $k!$ manieren ordenen. In het totaal kunnen we dus op die manier $\binom{n}{k}k!$ variaties construeren. □

**Gevolg 3.12**

Er geldt $$\binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Enkele belangrijke eigenschappen formuleren we in de volgende lemma's en een stelling.

**Lemma 3.13**

Er geldt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

*Bewijs.* Dit volgt onmiddellijk uit de bovenstaande formule, maar kan ook onmiddellijk uit de definitie afgeleid worden. $\square$

**Lemma 3.14**

Er geldt $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$.

*Bewijs.*

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} \\ &= \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

$\square$

**Stelling 3.15 — Formule van Stifel–Pascal**

Er geldt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ $(n, k \in \mathbb{N}^*,\ k < n)$.

*Bewijs.* Inderdaad, indien we uit de verzameling van $n$ elementen één element $a$ fixeren, dan kunnen al de mogelijke combinaties van de $n$ elementen in groepen van $k$ ingedeeld worden in twee disjuncte verzamelingen. Enerzijds zijn er de combinaties die $a$ bevatten. Een dergelijke combinatie vormen we door uit de $n-1$ overblijvende elementen $k-1$ andere elementen te kiezen. Het aantal is $\binom{n-1}{k-1}$. Anderzijds zijn er de combinaties die $a$ niet bevatten, zo een combinatie vormen we door uit de $n-1$ overblijvende elementen er juist $k$ uit te kiezen, hun aantal is $\binom{n-1}{k}$. Hieruit volgt de formule. $\square$

## De driehoek van Pascal

Uit de definitie en de eigenschappen van de combinaties kunnen we afleiden dat

$$\begin{array}{ccccc} \binom{n}{0} & = & \binom{n}{n} & = & 1 \\ \binom{n}{1} & = & \binom{n}{n-1} & = & n \\ \binom{n}{2} & = & \binom{n}{n-2} & = & \frac{n(n-1)}{2} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \end{array}$$

Uit de formule $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ $(n, k \in \mathbb{N}^*,\ k < n)$, volgt een recursieve methode om de binomiaalgetallen $\binom{n}{k}$ te berekenen, indien de binomiaalgetallen $\binom{n-1}{k}$, $0 \leq k \leq n-1$, gekend zijn. De getallen worden veelal in een driehoek gerangschikt. Deze driehoek wordt soms de driehoek van Pascal genoemd, naar Blaise Pascal (1623–1662).

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | | | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | | | |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | | | |
| 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 | | |
| 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 | 1 | |
| 1 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | 792 | 495 | 220 | 66 | 12 | 1 |

### 3.4.4 Herhalingsvariaties

Zoals het woord het zelf zegt, zal in dit geval een element in een geordend $k$-tal meerdere malen mogen voorkomen. De definitie luidt dus als volgt.

**Definitie 3.16**

Een *herhalingsvariatie van $k$ elementen uit $n$ elementen* is een **geordend** $k$-tal elementen uit een verzameling van $n$ elementen.

Het aantal herhalingsvariaties van $k$ elementen uit $n$ elementen noteren we door $\overline{V_n^k}$ of $\overline{P(n,k)}$.

**Stelling 3.17**

Er geldt $\overline{V_n^k} = n^k$.

*Bewijs.* Dit is onmiddellijk duidelijk, aangezien bij elke nieuwe keuze, al de elementen uit de verzameling van $n$ elementen gekozen mogen worden. $\square$

**Opmerking**

Het is duidelijk dat hier in tegenstelling tot het geval van de variaties zonder herhaling, $k$ kleiner dan, gelijk aan of groter dan $n$ kan zijn.

### 3.4.5 Herhalingscombinaties

**Definitie 3.18**

Een *herhalingscombinatie van k elementen uit n elementen* is een **niet-geordend** $k$-tal elementen, gekozen uit een verzameling van $n$ elementen.

Het aantal dergelijke herhalingscombinaties wordt voorgesteld door $\overline{\binom{n}{k}}$ of nog door $\overline{C(n,k)}$.

Een herhalingscombinatie ontstaat dus door uit een voorraad van $n$ voorwerpen, bvb. $a_1$, $a_2$, ... ,$a_n$, precies $k$ voorwerpen uit te kiezen. Herhaling is mogelijk maar de volgorde is niet van belang. In het algemeen zal zo'n keuze er dus als volgt uitzien: men heeft bijvoorbeeld $r_1$ keer het voorwerp $a_1$ gekozen, $r_2$ keer het voorwerp $a_2$, ..., $r_n$ keer het voorwerp $a_n$. Vermits in totaal $k$ voorwerpen gekozen werden, geldt uiteraard dat $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n = k$. We kunnen dus stellen

> Het aantal herhalingscombinaties van $k$ elementen uit $n$ elementen is gelijk aan het aantal manieren waarop we een natuurlijk getal $k$ kunnen schrijven als de som van $n$ natuurlijke getallen $r_1$, $r_2$, ... $r_n$.

**Stelling 3.19**

Er geldt $\overline{\binom{n}{k}} = \binom{n+k-1}{k}$.

*Bewijs.* Aangezien de volgorde geen belang heeft kunnen we dus in elk $k$-tal al de elementen van dezelfde soort samen plaatsen. We maken ons hiervan nu de volgende voorstelling. We beschikken over $n$ hokjes waarover we $k$ stippen verdelen. Indien we de hokjes afscheiden door middel van een schot (rechte streep), dan hebben we hiervoor $n-1$ schotten nodig. Het probleem is dus herleid tot het opvullen van $n-1+k$ plaatsen met $k$ stippen en $n-1$ rechte strepen. Indien we eerst de $k$ stippen plaatsen, dan moeten de overige $n-1$ plaatsen ingenomen worden door strepen. Bijgevolg is het voldoende om na te gaan op hoeveel manieren we $n-1+k$ plaatsen kunnen opvullen met $k$ stippen (of gelijkwaardig hiermee: op hoeveel manieren we $n-1+k$ plaatsen kunnen opvullen met $n-1$ strepen). Met andere woorden, het probleem is herleid tot de vraag op hoeveel manieren we uit een verzameling van $n-1+k$ plaatsen er $k$ kunnen selecteren. Dit is uiteraard het aantal combinaties van $k$ elementen uit $n+k-1$ elementen (of gelijkwaardig: $n-1$ elementen uit $n+k-1$ elementen). □

**Samenvatting**

De verschillende tellingen die we hier besproken hebben, hangen af van de manier van kiezen van de elementen; met name

- met of zonder terugplaatsen van de gekozen elementen,
- met of zonder rekening te houden met de volgorde.

Tabel 3.1 vat de resultaten samen.

## 3.5 Toepassingen op combinatieleer

### 3.5.1 De binomiale kansverdeling

Combinatorische tellingen van bovenstaande aard komen zeer veel voor in de theorie van de kansrekening. We beperken ons hier tot één basisvoorbeeld.

| | zonder terugplaatsen | met terugplaatsen |
|---|---|---|
| ongeordend | $\binom{n}{k}$ | $\binom{n+k-1}{k}$ |
| geordend | $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ | $n^k$ |

Tabel 3.1: Overzicht (herhalings)variaties en (herhalings)combinaties

Gegeven is een voorraad van $a$ blauwe letters en van $b$ rode letters. Alle letters zijn verschillend. Hoeveel woorden (eventueel zonder betekenis) van $n$ letters (met herhaling van letters toegestaan) kunnen hieruit gevormd worden? Dat is eenvoudig: $(a+b)^n$. Hoeveel van die mogelijke woorden bevatten juist $k$ blauwe (en dus $n-k$ rode) letters? Daarvoor gaan we eerst na op hoeveel manieren we van $n$ plaatsen er $k$ kunnen blauw kleuren (en de rest dus rood). Dit is het aantal combinaties van $k$ elementen uit $n$ elementen, met andere woorden $\binom{n}{k}$. Op hoeveel manieren kunnen we nu de blauwe plaatsen invullen met een blauwe letter? Dit is duidelijk op $a^k$ manieren (herhalingsvariatie). Analoog kunnen de rode plaatsen op $b^{n-k}$ manieren opgevuld worden met rode letters. Het totaal aantal woorden met $k$ blauwe en $n-k$ rode letters is bijgevolg gelijk aan

$$\binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Gesteld dat we dus de kans willen bepalen opdat bij de keuze van 1 woord uit de $(a+b)^n$ woorden we een woord kiezen met juist $k$ blauwe letters en $n-k$ rode letters, dan wordt deze kans gegeven door:

$$\frac{1}{(a+b)^n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Merk op dat $a/(a+b) = p$ de kans is dat we uit de $a+b$ letters er 1 blauwe uitnemen, en dat $b/(a+b) = q$ de kans is dat we uit de $a+b$ letters er 1 rode uitnemen (merk op dat er slechts één van de 2 mogelijkheden kan optreden, zodat $p+q=1$). We kunnen dan de bovenstaande formule als volgt herschrijven:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+b)^n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} &= \binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

Dergelijk model wordt de *binomiale* kansverdeling genoemd. Een gelijkwaardige formulering van dit model is als volgt.

> *Wat is de kans dat we uit een verzameling van $n$ voorwerpen waarvan er $n_1$ de eigenschap $s_1$ en $n_2$ de eigenschap $s_2$ hebben ($n_1 + n_2 = n$), er juist $k$ elementen uitnemen met de eigenschap $s_1$, waarbij het gekozen voorwerp telkens teruggeplaatst wordt.*

### 3.5.2 Het aantal deelverzamelingen van een verzameling

**Stelling 3.20**

Een verzameling $X$ van $n$ elementen bezit $2^n$ deelverzamelingen.

*Bewijs.* Noem $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en beschouw de verzameling $Y = \{0, 1\}$. Met elke deelverzameling $S$ van $X$ kunnen we nu een functie $f_S$ van $X$ naar $Y$ laten corresponderen, die als volgt gedefinieerd wordt.

$$f_S(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x_i \notin S \\ 1 & \text{als} \quad x_i \in S. \end{cases}$$

Het aantal deelverzamelingen van $X$ is bijgevolg gelijk aan het aantal geordende $n$-tallen over de verzameling $Y = \{0, 1\}$ met 2 elementen. Dit is bijgevolg gelijk aan het aantal herhalingsvariaties van $n$ elementen uit 2 elementen, dus aan $2^n$. □

### 3.5.3 Het binomium van Newton

De volgende formules maken deel uit van de zogenaamde reeks merkwaardige producten

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Deze formules zijn bijzondere gevallen van het zogenaamde *binomium van Newton.*

**Stelling 3.21**

Veronderstel dat $n$ een positief natuurlijk getal is, dan geldt voor elke 2 (reële) getallen $a$ en $b$, dat

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

*Bewijs.* De formule volgt uit de manier waarop we het product met $n$ factoren $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ uitrekenen. De coëfficiënt van $a^k b^{n-k}$ is het aantal manieren om uit de $n$ factoren $(a+b)$, $k$ maal $a$ te kiezen (en dus $n-k$ maal $b$). Dit is het aantal combinaties van $k$ elementen uit $n$ elementen, dus $\binom{n}{k}$.□

**Opmerking**

1. Het doet er niet toe of $a$ en $b$ reële getallen zijn, we hebben enkel gesteund op de commutativiteit van de vermenigvuldiging.

2. Volgende vormen zijn allemaal equivalente vormen van het binomium van Newton (bewijs als oefening)

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^{n-k} b^{k}.
\end{aligned}$$

### 3.5.4 Het (veralgemeend) inclusie–exclusieprincipe

We hebben in het vereenvoudigd inclusieprincipe gezien dat voor de kardinaliteit van de unie van 2 verzamelingen $A_1$ en $A_2$ geldt:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Beschouwen we 3 verzamelingen $A_1$, $A_2$ en $A_3$, dan moeten we naast de orde van de doorsneden $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$, $A_2 \cap A_3$, ook rekening houden met de orde van de doorsnede $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ en dan geldt:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Deze formules kunnen we nu samenvatten in het zogenaamde (veralgemeend) *inclusie–exclusieprincipe.*

**Stelling 3.22 — Inclusie-exclusieprincipe**

Als $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eindige verzamelingen zijn, dan is

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n.$$

Hierbij is $\alpha_i$ de notatie voor de som van de kardinaalgetallen van al de mogelijke doorsneden die men kan vormen met $i$ verzamelingen uit $A_1, \ldots, A_n$.

*Bewijs.* We bewijzen dat elk element $x$ uit de unie inderdaad slechts 1 maal wordt geteld in het rechterlid. Veronderstel dat $x$ tot juist $k$ verzamelingen behoort. Dan zal $x$ een bijdrage $k$ leveren in $\alpha_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$. In de som $\alpha_2 = \sum_{i,j=1}^{n} |A_i \cap A_j|$ $(i \neq j)$ zal de bijdrage 1 zijn dan en slechts dan als $A_i$ en $A_j$ zich onder de $k$ verzamelingen bevinden die $x$ bevatten. Er zijn $\binom{k}{2}$ dergelijke paren verzamelingen $\{A_i, A_j\}$, bijgevolg is $\binom{k}{2}$ de bijdrage van $x$ tot $\alpha_2$. Algemeen is $\binom{k}{i}$ de bijdrage van $x$ in $\alpha_i$. De totale bijdrage van $x$ in het rechterlid is bijgevolg

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1}\binom{k}{j}.$$

Aangezien echter (zie oefeningen)

$$0 = (1-1)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}$$

volgt hieruit dat de bijdrage van $x$ tot het rechterlid juist 1 is. □

### 3.5.5 Permutaties zonder fixelementen

Een weinig efficiënte secretaresse moet $n$ brieven in $n$ omslagen doen. Op hoeveel manieren kan ze erin slagen om alle brieven in verkeerde omslagen te doen?

We vragen dus in feite het aantal permutaties van de verzameling $\{1, \ldots, n\}$ die geen enkel fixelement bezitten. Volgens het inclusie-exclusie principe is het totaal aantal permutaties zonder fixelementen $d_n$ van $\{1, \ldots, n\}$ gelijk aan

$$d_n = n! - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n,$$

waarbij $\alpha_i$ het aantal permutaties is van $\{1, \ldots, n\}$ die minstens $i$ elementen fixeren voor alle mogelijke keuzes van $i$ uit $\{1, \ldots, n\}$. Er zijn nu $\binom{n}{i}$ manieren om $i$ elementen te kiezen uit $\{1, \ldots, n\}$, en het aantal permutaties van $\{1, \ldots, n\}$ die deze $i$ elementen (elementsgewijs) fixeren is het aantal permutaties op de $n - i$ overige elementen, met andere woorden $(n - i)!$. Bijgevolg is

$$\alpha_i = \binom{n}{i} \times (n - i)! = \frac{n!}{i!}.$$

Zodat het totaal aantal permutaties zonder fixelementen gelijk is aan

$$d_n = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

Willen we echter een recursieve definitie van het getal $d_n$ vinden, dan kunnen we als volgt te werk gaan. Aangezien geen enkel element van $\{1, \ldots, n\}$ gefixeerd wordt, is het beeld van 1 onder een bepaalde wanorde $f$ het getal $f(1) = k_1$ met $k_1 \neq 1$. We fixeren nu $k_1$. Er kunnen nu 2 gevallen optreden: ofwel is $f(k_1) = 1$ (maw. $f^2(1) = 1$)) ofwel is $f(k_1) \neq 1$. We tellen nu beide soorten van permutaties zonder fixelementen.

Indien $f(k_1) = 1$, dan zal $f$ een permutatie zonder fixelementen definiëren op de verzameling $\{1, \ldots, n\} \setminus \{1, k_1\}$. Het aantal dergelijke permutaties is per definitie gelijk aan $d_{n-2}$. Merk op dat elke permutatie zonder fixelementen op $\{1, \ldots, n\} \setminus \{1, k_1\}$ aanleiding geeft tot juist 1 permutatie zonder fixelementen op $\{1, \ldots, n\}$ door de definitie $f(1) = k_1$; $f(k_1) = 1$.

Veronderstel nu dat $f$ een permutatie zonder fixelementen is waarvoor geldt dat $f(k_1) \neq 1$, dan bestaat er een $k_0 \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{1, k_1\}$ zodanig dat $f(k_0) = 1$. We definiëren nu een nieuwe permutatie $g$ in $\{2, \ldots, n\}$ door $g(k_0) = k_1$ en $g(k) = f(k)$ $\forall k \neq k_0$. Dan is $g$ eveneens een permutatie zonder fixelementen, maar nu op de verzameling $\{2, \ldots, n\}$, en zo zijn er

$d_{n-1}$. Aangezien we weten dat 1 het beeld is onder $f$ van $k_0$ en dat $k_1$ het beeld is onder $f$ van 1, kunnen we op een unieke manier $g$ uitbreiden tot de permutatie $f$ waarvan we waren vertrokken.

Bijgevolg het aantal permutaties zonder fixelementen $f$ waarvoor geldt dat $f(1) = k_1 \in \{2, \ldots, n\}$ (met $k_1$ een vast gekozen getal) is gelijk aan $d_{n-1} + d_{n-2}$. Aangezien er nu $n-1$ mogelijke keuzes zijn voor $k_1$, zal

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

Merk op dat $d_1 = 0$ terwijl $d_2 = 1$, zodat we op die manier een recursieve definitie gegeven hebben van het aantal permutaties zonder fixelementen op een verzameling van $n$ elementen.

Deze recursieve definitie geeft de volgende waarden van $d_n$ voor $n \leq 8$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_n$ | 0 | 1 | 2 | 9 | 44 | 265 | 1854 | 14833 |

## 3.6 De Stirlinggetallen

**Definitie 3.23**

Het *Stirlinggetal* $S(n,k)$ (van de tweede soort) is het aantal mogelijkheden waarop men een verzameling $X$ met $n$ elementen kan schrijven als een disjuncte unie van $k$ niet-ledige deelverzamelingen.

**Stelling 3.24**

Het Stirlinggetal $S(n,k)$ met $1 \leq k \leq n$ wordt recursief gedefinieerd door

$$\begin{aligned} S(n,1) &= 1 \\ S(n,k) &= S(n-1,k-1) + kS(n-1,k) \quad (2 \leq k \leq n-1) \\ S(n,n) &= 1. \end{aligned}$$

*Bewijs.* Het is duidelijk dat $S(n,1) = S(n,n) = 1$. Veronderstel nu dat $2 \leq k \leq n-1$. Noem $z$ een willekeurig element van $X$. Indien we al de mogelijke partities van $X$ in $k$ klassen beschouwen, dan zal ofwel (i) het singleton $\{z\}$

een klasse van de partitie zijn ofwel (ii) zal $\{z\}$ een eigenlijke deelverzameling zijn van één klasse. Indien we in het eerste geval $\{z\}$ wegnemen uit de partitie, dan ontstaat een partitie van de verzameling $X \setminus \{z\}$ in $k-1$ klassen. Het aantal dergelijke partities is $S(n-1, k-1)$. Omgekeerd zal elke partitie $\mathcal{P}$ van $X \setminus \{z\}$ in $k-1$ klassen, op unieke manier een partitie van $X$ in $k$ klassen definiëren door aan $\mathcal{P}$ het singleton $\{z\}$ toe te voegen. Indien we echter in het tweede geval $z$ wegnemen uit de partitie, dan ontstaat een partitie van de verzameling $X \setminus \{z\}$ in $k$ klassen. Omgekeerd, beschouw een partitie $\mathcal{P}$ van de verzameling $X \setminus \{z\}$ in $k$ klassen. Dan kunnen we hieruit $k$ verschillende partities in $k$ klassen van de verzameling $X$ construeren door het element $z$ achtereenvolgens toe te voegen aan elke klasse van $\mathcal{P}$. Hieruit mogen we besluiten dat er $k \cdot S(n-1, k)$ partities van de tweede soort zijn.

Het totaal aantal partities van een verzameling van $n$ elementen in $k$ klassen is bijgevolg gelijk aan

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k) \quad (2 \leq k \leq n-1).$$

□

### Voorbeeld

Naar analogie met de driehoek van Pascal voor binomiaalgetallen kan er ook een driehoek voor de Stirlinggetallen van de tweede soort opgesteld worden.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 3 | 1 | | | | |
| 1 | 7 | 6 | 1 | | | |
| 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | |
| 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | |
| 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 |

**Gevolg 3.25**

Het aantal surjecties van een verzameling $X$ ($|X| = n$) naar een verzameling $Y$ ($|Y| = k$) is gelijk aan $k!S(n, k)$.

*Bewijs.* Bewijs dit gevolg als oefening. □

De kritische lezer vraagt zich misschien af waar de Stirlinggetallen van de *eerste* soort gebleven zijn. In [12, Sectie 3.4] vindt men een prima omschrijving van de *beide* soorten Stirlinggetallen en het verband ertussen.

## 3.7 De multinomiaalgetallen

**Definitie 3.26**

Het aantal functies van een verzameling $X$ met $n$ elementen op een verzameling $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, zodanig dat $y_i$ het beeld is van $n_i$ elementen uit $X$ ($\sum_{i=1}^{k} n_i = n$), wordt het *multinomiaalgetal* genoemd en genoteerd als:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Merk op dat

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1},$$

vandaar de benaming multinomiaalgetallen als veralgemening van de binomiaalgetallen.

**Stelling 3.27**

Voor elke verzameling positieve natuurlijke getallen $n, n_1, \ldots n_k$ waarvoor $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ is

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

*Bewijs.* We mogen veronderstellen dat elk element $y_i$ minstens één maal wordt bereikt, maw. alle $n_i > 0$. Merk echter op dat in de definitie $n_i = 0$ toegelaten is, maar als gevolg van de afspraak $0! = 1$ levert dit toch geen bijdrage tot het multinomiaalgetal. Met andere woorden we mogen veronderstellen dat we het aantal surjecties $f$ van $X$ op $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ tellen zodanig dat $y_i$ het beeld is van $n_i$ elementen uit $X$. Elke surjectie definieert een partitie van $X$ in $k$ klassen $X_i$ met $|X_i| = n_i$. Indien we de $n_i$ elementen uit de klasse $X_i$ onderling permuteren, ontstaat een permutatie van de verzameling $X$. Gegeven $f$ ontstaan op die manier $n_1! n_2! \cdots n_k!$ permutaties. Indien we al de mogelijke surjecties van $X$ op $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, zodanig dat $y_i$ beeld is van $n_i$ elementen uit $X$ beschouwen, en zo zijn er dus

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

en telkens de elementen van al de klassen $X_i$ permuteren, en zo zijn er dus $n_1!n_2!\cdots n_k!$, dan hebben we al de mogelijke permutaties van $X$ geconstrueerd, en dit zijn er $n!$. Hieruit volgt het gestelde. $\square$

Aangezien de multinomiaalgetallen de veralgemening zijn van de binomiaalgetallen, is het niet verwonderlijk dat er een veralgemening bestaat van het binomium van Newton, met name de *multinomiaalstelling*.

**Stelling 3.28**

Voor elke 2 positieve natuurlijke getallen $n$ en $k$ geldt dat

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}.$$

Hierbij wordt de som in het rechterlid genomen over al de mogelijke $k$-tallen van natuurlijke getallen $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ waarvoor $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

*Bewijs.* De coëfficiënt van $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$ in de ontwikkeling is het aantal keer dat we uit de $n$ factoren $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$, de term $a_1$ nemen uit $n_1$ van de factoren, de term $a_2$ nemen uit $n_2$ van de factoren, ..., de term $a_k$ nemen uit $n_k$ van de factoren. Dit is juist de definitie van de multinomiaalgetallen. Hieruit volgt het gestelde. $\square$