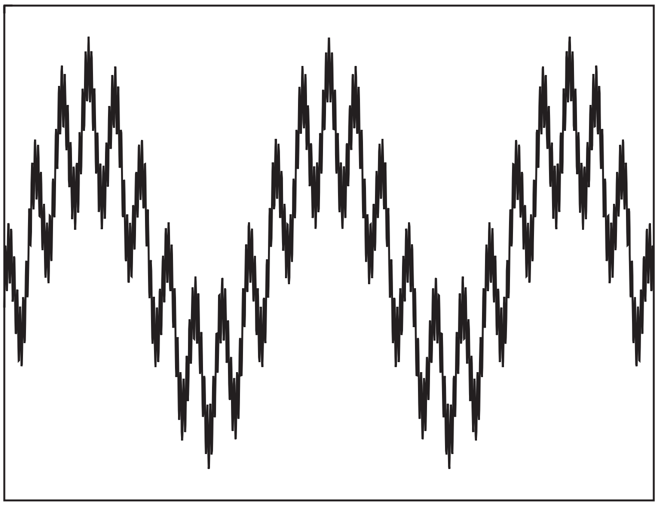
UNIVERSITEIT GENT
FACULTEIT WETENSCHAPPEN



ANALYSE I

Prof. J. Vindas
Editie 2022-2023

Analyse I behandelt

Functies van één reële veranderlijke.

Met dank aan prof. C. Impens (en prof. H. Vernaeve) voor het ter beschikking stellen van de tekst waarop deze cursus gebaseerd is. De fouten die deze editie ongetwijfeld bevat, zijn met grote waarschijnlijkheid te wijten aan wijzigingen aangebracht door de auteur. Gelieve ze te melden aan `jasson.vindas@UGent.be`.

De figuur op de voorpagina toont de beeldlijn $y = \frac{\cos(13\pi x)}{2} + \frac{\cos(169\pi x)}{4} + \frac{\cos(2197\pi x)}{8}$ en geeft een goed beeld van het z.g. *monster van Weierstrass* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(13^n \pi x)}{2^n}$, een functie die overal continu en nergens afleidbaar is.

Inhoud

Hoofdstuk 3

Afleidbaarheid

De afgeleide van een functie is één van de belangrijkste concepten uit de klassieke analyse. Samen met de integraal, die we later zullen bestuderen, vormt ze de bron waaruit de *calculus*[1] afkomstig is. Newton en Leibniz waren in staat om, onafhankelijk van elkaar, ideeën te ontwikkelen voor de differentiaal- en integraalrekening die routinemethoden geven waarmee men problemen kan oplossen die in hun tijd als te moeilijk of zelfs als onzinnig werden beschouwd. In dit hoofdstuk en hoofdstuk 5 zullen we enkele van deze ideeën bestuderen.

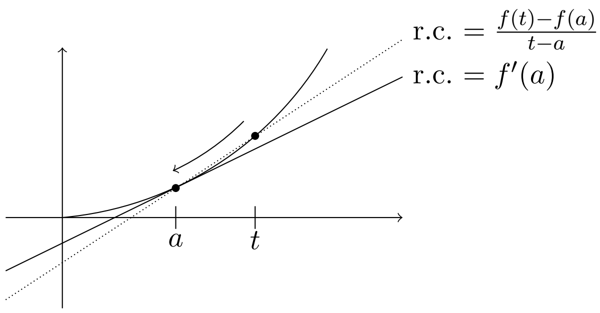
3.1 Afgeleiden van eerste orde

3.1.1 Algemene eigenschappen

3.1.1 Definitie. Zij f een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en a een inwendig punt van $\mathcal{D}_f$, zodat $f(a+h)$ bestaat als $|h|$ klein genoeg is. Men noemt f **afleidbaar** in a als

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \left(= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \tag{3.1}$$

bestaat. In dat geval noemt men de waarde van deze limiet de **afgeleide** van f in a; wij noteren haar als $f'(a)$.



Figuur 3.1: Meetkundig betekenis van de afgeleide

Meetkundig gezien is $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ de richtingscoëfficiënt van de rechte door de punten $(a, f(a))$ en $(t, f(t))$, beide gelegen op de grafiek van f. De afgeleide $f'(a)$ geeft meetkundig gezien

[1]een andere benaming voor differentiaal- en integraalrekening.

de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(a, f(a))$ (als deze raaklijn bestaat).
Een van de vele fysische interpretaties is als volgt: als $f(t)$ de plaats van een voorwerp geeft (langs de Y-as) als functie van de tijd t, dan geeft $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ de gemiddelde snelheid in het tijdsinterval $[a, t]$. In de limiet $t \to a$ vinden we de (zgn. ogenblikkelijke) snelheid van het voorwerp op tijdstip a.

3.1.2 Voorbeeld. De afgeleide van $f(x) = cx+b$ in a is $f'(a) = c$ voor alle $a \in \mathbb{R}$. Inderdaad,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ca + ch + b - ac - b}{h} = c.$$

3.1.3 Stelling. *f is afleidbaar in a juist als er een reëel getal α en een functie r bestaan waarvoor we kunnen schrijven*

$$f(a+h) = f(a) + \alpha h + hr(h) \qquad \textit{met } r(h) \to 0 \textit{ als } h \to 0. \tag{3.2}$$

Bewijs. Uit (3.2) volgt dat, voor $h \neq 0$ en voldoende klein,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha + r(h),$$

waaruit (3.1) bestaat ($= \alpha$). Omgekeerd, veronderstel dat (3.1) bestaat, en noem dit getal α. Voor $h \neq 0$ en voldoende klein kunnen we dan definiëren

$$r(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \alpha.$$

Blijkbaar geldt dan de ontbinding (3.2), met $r(h) \to 0$ voor $h \to 0$. □

3.1.4 Opmerking. Men kan (3.2) zien als een manier om de limiet (3.1) zonder noemers uit te drukken. Ook zal (3.2) zich gemakkelijker laten veralgemenen in meerdere veranderlijken (zie Analyse II).

3.1.5 Definitie. De **afgeleide (functie)** van f, genoteerd f', is de functie met $f'(x)$ als waarde in die punten x waar f afleidbaar is.

Het domein van f' is uiteraard een deelverzameling (eventueel leeg) van het domein van f.

3.1.6 Opmerkingen.

1. Overeenkomstig de traditie om een concrete functie f te noteren als $f(x)$, noteert men haar afgeleide functie f' ook als $\big(f(x)\big)'$. Zo schrijven we kortweg $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ met de betekenis: stellen we $f(x) := x^n, \forall x \in \mathbb{R}$, dan is $f'(x) = nx^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Behalve f' zijn ook nog de notaties Df en $\frac{df}{dx}$ gebruikelijk, waarbij in de laatste notatie[2] de noemer verwijst naar de naam van de onafhankelijk veranderlijke, die men uit de context moet halen. Voor $f'(a)$ schrijft men dan $Df(a)$ resp. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_a$ of $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$.

[2]Het symbolisch quotiënt $\frac{dy}{dx}$ moet men als één geheel zien. Het werken met dx en dy afzonderlijk leidt zeer snel tot contradicties.

We leiden nu enkele eigenschappen af uit het bestaan en uit het teken van de afgeleide in een punt.

3.1.7 Stelling. *Is f, met domein $\mathcal{D}$, afleidbaar in a, dan gelden de volgende eigenschappen:*

1. *f is continu in a*
2. ***eigenschap van positieve afgeleide**[3]: is $f'(a) > 0$, dan bestaat er een $\delta > 0$ met de eigenschap: voor alle $a < x < a + \delta$ is $f(x) > f(a)$ en voor alle $a - \delta < x < a$ is $f(x) < f(a)$*
3. ***eigenschap van negatieve afgeleide**[4]: is $f'(a) < 0$, dan bestaat er een $\delta > 0$ met de eigenschap: voor alle $a < x < a + \delta$ is $f(x) < f(a)$ en voor alle $a - \delta < x < a$ is $f(x) > f(a)$.*

Bewijs. 1. Uit (3.2) halen we dat $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, d.w.z. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. Veronderstel dat

$$f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \left(= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) > 0.$$

Dan is (behoud van teken) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ in een doorprikte omgeving van a, stel voor $a \neq x \in]a - \delta, a + \delta[$. Als dus $a < x < a + \delta$, dan is $f(x) - f(a) > 0$; is $a - \delta < x < a$, dan is $f(x) - f(a) < 0$. Analoog voor 3. $\square$

Nu enkele veelgebruikte rekenregels.

3.1.8 Stelling. *Beschouw twee functies f en g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, beiden afleidbaar in a. Dan hebben we:*

1. *$f + g$ is afleidbaar in a, en $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$*
2. *$f - g$ is afleidbaar in a, en $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$*
3. *fg is afleidbaar in a, en $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$*
4. *als $g(a) \neq 0$ dan is f/g afleidbaar in a, en $(f/g)'(a) = \dfrac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

Bewijs. 1. Voor $|h|$ klein genoeg hebben we

$$\frac{\big(f(a+h) + g(a+h)\big) - \big(f(a) + g(a)\big)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h},$$

waaruit na limietovergang $h \to 0$ het te bewijzen volgt. Analoog voor 2.
3.

$$\frac{\big(f(a+h)g(a+h)\big) - \big(f(a)g(a)\big)}{h} = g(a)\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a+h)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

[3] In woorden uitgedrukt: 'onmiddellijk' rechts van a zijn de functiewaarden groter dan in a, 'onmiddellijk' links kleiner.

[4] In woorden uitgedrukt: 'onmiddellijk' rechts van a zijn de functiewaarden kleiner dan in a, 'onmiddellijk' links groter.

Voor $h \to 0$ nadert de eerste term van het rechterlid tot $g(a)f'(a)$ en de tweede tot $f(a)g'(a)$, waarbij we de continuïteit van f in a gebruiken in de vorm $f(a+h) \to f(a)$.
4. We behandelen vooraf het speciaal geval waarbij $f(x) = 1$ voor alle x, m.a.w. we zoeken de afgeleide van $1/g$ in een punt a waar $g(a) \neq 0$. Wegens $g(a) \neq 0$ en de continuïteit van g in a is (behoud van teken) $g(a+h) \neq 0$ als $|h|$ voldoende klein is. Voor $|h|$ voldoende klein kunnen we dus schrijven

$$\frac{\frac{1}{g}(a+h) - \frac{1}{g}(a)}{h} = -\left(\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right) \cdot \left(\frac{1}{g(a)}\right) \cdot \left(\frac{1}{g(a+h)}\right).$$

Voor $h \to 0$ nadert de eerste factor in het rechterlid tot $g'(a)$ en de derde tot $\frac{1}{g(a)}$ (continuïteit van g in a). Vandaar

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

De algemene formule 4. volgt uit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\left(\frac{1}{g}\right) + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - f\frac{g'}{g^2}.$$

□

3.1.9 Voorbeeld. We tonen nu aan dat $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ via volledige inductie. We weten al dat dit geldig is voor $n = 1$: $(x)' = 1$. Neem aan dat $(x^n)' = nx^{n-1}$. De productregel van afgeleiden impliceert $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n$.

3.1.10 Stelling (Kettingregel). *Beschouw twee functies f en g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, met samengestelde*

$$F(x) = g\big(f(x)\big) \qquad (x \in \mathcal{D}_F).$$

Als f afleidbaar is in a en g afleidbaar in $f(a)$, dan is F eveneens afleidbaar in a, en

$$F'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a).$$

Bewijs. 1. Vooreerst gaan we na dat a een inwendig punt van $\mathcal{D}_F$ is. Omdat g afleidbaar in $f(a)$ is, is $f(a)$ een inwendig punt van $\mathcal{D}_g$. Er bestaat dus een $\varepsilon > 0$ met $]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[\subseteq \mathcal{D}_g$. Omdat f continu (zelfs afleidbaar) in a is, bestaat er een $\delta > 0$ met de eigenschap dat voor elke $x \in]a-\delta, a+\delta[\cap \mathcal{D}_f$ geldt dat $f(x) \in]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$. We kunnen δ zo klein kiezen (desnoods door te verkleinen) dat $]a-\delta, a+\delta[\subseteq \mathcal{D}_f$, want, doordat f afleidbaar in a is, is a een inwendig punt van $\mathcal{D}_f$. We besluiten dan dat voor alle $x \in]a-\delta, a+\delta[$ geldt dat $f(x) \in \mathcal{D}_g$, m.a.w. $x \in \mathcal{D}_F$. Vandaar $]a-\delta, a+\delta[\subseteq \mathcal{D}_F$.
2. Veronderstel eerst dat $f'(a) \neq 0$. Wegens 3.1.7 is $f(x) \neq f(a)$ in een doorprikte omgeving van a. Dan is

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{x \to a}{\longrightarrow} g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

(we maken hier gebruik van 2.2.9 en $f(x) \to f(a)$ als $x \to a$ wegens 3.1.7.1).
3. Er blijft het geval $f'(a) = 0$. Met deze voorwaarde moeten we dus aantonen dat $F'(a) = 0$ $(= g'(f(a)) \cdot 0)$. Want $g'(f(a)) = \lim_{y \to f(a)} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}$ bestaat, kunnen we $M > 0$ en $\varepsilon > 0$

vinden waarvoor $|g(y) - g(f(a))| < M|y - f(a)|$ zodra $|y - f(a)| < \varepsilon$ (daarvoor maken we gebruik van 2.2.3). Door continuïteit van f in a, bestaat er dus een doorprikte omgeving van a waarop

$$\left|\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a}\right| \leq M\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| \xrightarrow{x \to a} M \cdot 0 = 0.$$

Het te bewijzen $F'(a) = 0$ volgt dus uit de Sandwich-regel voor limieten 2.1.10.6.

□

3.1.11 Opmerkingen.

1. Overeenkomstig de traditie om een concrete functie f te noteren als $f(x)$, noteert men vaak $(g(f(x)))'$ i.p.v. $(g \circ f)'(x)$. Verwar $(g(f(x)))'$ niet met $g'(f(x))$. Het eerste is de afgeleide van de samengestelde functie $g \circ f$ in x (dus $g'(f(x))f'(x)$ wegens de kettingregel), het tweede is de afgeleide van g in het punt $f(x)$!

2. Voor samenstellingen van meer dan twee functies past men de kettingregel een aantal keren na elkaar toe. Zo is

$$(h(g(f(x))))' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

3.1.12 Stelling (Afleidbaarheid van inverse). *Zij f continu en strikt stijgend of strikt dalend over het interval I (gelijk welk type), en veronderstel dat f afleidbaar is in een bepaald punt c van I, met $f'(c) \neq 0$. Dan is de inverse φ van f afleidbaar in $f(c)$, en*

$$\varphi'\big(f(c)\big) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Bewijs. We willen aantonen dat

$$\lim_{y \to f(c)} \frac{\varphi(y) - c}{y - f(c)}$$

bestaat en gelijk is aan $\frac{1}{f'(c)}$. Nu is

$$\lim_{y \to f(c)} \frac{y - f(c)}{\varphi(y) - c} = \lim_{y \to f(c)} \frac{f(\varphi(y)) - f(c)}{\varphi(y) - c} = f'(c).$$

Inderdaad, als $y \to f(c)$, dan is (wegens de continuïteit van φ in $f(c)$) ook $\varphi(y) \to \varphi(f(c)) = c$, zodat de laatste gelijkheid volgt door de definitie van $f'(c)$.
Omdat $f'(c) \neq 0$, volgt het gevraagde dan door de rekenregels van limieten. □

3.1.2 Middelwaardestelling

3.1.13 Definitie. Men zegt dat een functie f, met domein $\mathcal{D}$, in een punt $a \in \mathcal{D}$ (hoeft geen inwendig punt te zijn) een **(lokaal) maximum** bereikt als er een omgeving $V :=]a - R, a + R[$ van a bestaat $(R > 0)$ met de eigenschap dat

$$(\forall x \in V \cap \mathcal{D})(f(x) \leqslant f(a)). \tag{3.3}$$

Analoog voor een **(lokaal) minimum**. Een **(lokaal) extremum** is hetzij een lokaal maximum hetzij een lokaal minimum.

3.1.14 Opmerkingen.

1. Als f een extremum bezit in a, dan is $f(a)$ (en niet a) het z.g. *extremum* (= extreme waarde).
2. De grootste en kleinste waarden opgeleverd door de extremumstelling van Weierstrass zijn *globale* extrema, met (voor een maximum) i.p.v. (3.3) het sterkere
$$(\forall x \in [a,b])(f(x) \leqslant f(a)).$$

3.1.15 Stelling (Nodige voorwaarde voor extremum). *Bereikt f in a een lokaal extremum, en is f in a afleidbaar,*[5] *dan is $f'(a) = 0$.*

Bewijs. Veronderstel dat f in a een lokaal maximum bereikt; het bewijs voor een minimum verloopt analoog. Het kan niet dat $f'(a) > 0$, want dan heeft f wegens 3.1.7.2 'onmiddellijk' rechts van a grotere waarden dan in a. Evenmin kan het dat $f'(a) < 0$, want dan heeft f wegens 3.1.7.3 'onmiddellijk' links van a grotere waarden dan in a. Bijgevolg is $f'(a) = 0$. □

3.1.16 Definitie. Een functie noemt men **afleidbaar over/in** een open interval (d.w.z., van de vorm $]a,b[$, $]-\infty,a[$, $]a,+\infty[$ of $\mathbb{R}$) als f in elk punt van dit interval afleidbaar is.

3.1.17 Stelling (Middelwaardestelling[6]**).** *Als $a < b$ en*

1. f is afleidbaar over $]a,b[$

2. f is continu over $[a,b]$

dan bestaat er minstens één $c \in\ ]a,b[$ waarvoor

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)}$$

Bewijs. I. Bijzonder geval: $f(a) = f(b)$. In dat geval moeten we bewijzen dat $f'(c) = 0$ voor minstens één $a < c < b$. (Deze eigenschap staat bekend als de **Stelling van Rolle**.)
Zij $f(a) = f(b) =: C$. Door de extremumstelling van Weierstrass bereikt f over $[a,b]$ haar grootste waarde in een zeker punt $c \in [a,b]$. Als deze $c \in\ ]a,b[$, dan leert 3.1.15 dat $f'(c) = 0$. In het andere geval is $c = a$ of $c = b$, zodat de grootste waarde van f gelijk is aan C.
Analoog bereikt f haar kleinste waarde in een zeker punt $c \in [a,b]$. Als deze $c \in\ ]a,b[$, dan volgt opnieuw $f'(c) = 0$. In het andere geval is de kleinste waarde van f gelijk aan C.
In het overblijvend geval is dus C zowel de grootste als de kleinste waarde van f op $[a,b]$, zodat f constant is op heel $[a,b]$, en dus $f'(c) = 0$ voor *elke* c uit $]a,b[$.
II. Algemeen geval. We herleiden het probleem tot geval I door $F(x) := f(x) - \alpha x$ te definieren, waarbij we $\alpha \in \mathbb{R}$ zo trachten te kiezen dat $F(a) = F(b)$. Uit
$$F(a) = f(a) - \alpha a = f(b) - \alpha b = F(b)$$
volgt dat $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ de enige keuze is die hieraan voldoet. Deze F is ook afleidbaar over $]a,b[$ en continu over $[a,b]$, zodat een $a < c < b$ bestaat waarvoor
$$F'(c) = f'(c) - \alpha = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$
□

[5] wat o.a. inhoudt dat a een inwendig punt is van $\mathcal{D}_f$

[6] De stelling dankt haar naam aan het feit dat $(f(b) - f(a))/(b-a)$ de gemiddelde waarde is van f' op $[a,b]$.

3.1.18 Opmerking. We zullen de middelwaardestelling ook in de volgende vorm toepassen: *als f afleidbaar is over $]a, b[$ en $f(a+)$ en $f(b-)$ bestaan, dan bestaat er minstens één $c \in]a, b[$ waarvoor $f(b-) - f(a+) = (b - a)f'(c)$.*
Het volstaat immers om $g(x) := f(x)$ te definiëren voor elke $x \in]a, b[$, $g(a) := f(a+)$ en $g(b) := f(b-)$ en vast te stellen dat g aan de opgave van de middelwaardestelling voldoet, en dat $f'(x) = g'(x)$ voor elke $x \in]a, b[$.

3.1.3 Toepassingen van de middelwaardestelling

We onderzoeken nu m.b.v. de middelwaardestelling het stijgen en dalen van functies.

3.1.19 Stelling (Stijgen en dalen). *Zij f afleidbaar in het open interval I. Dan hebben we:*

1. *f is stijgend in I juist als $(\forall x \in I)(f'(x) \geqslant 0)$.*
2. *f is dalend in I juist als $(\forall x \in I)(f'(x) \leqslant 0)$.*
3. *f is constant in I juist als $(\forall x \in I)(f'(x) = 0)$.*
4. *Als voor elke $x \in I$ geldt dat $f'(x) > 0$, dan is f strikt stijgend in I.*

Bewijs. 1. Is f stijgend in I, dan geldt voor alle $x < x + h$ in I dat $f(x) \leqslant f(x + h)$. Vandaar

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Omgekeerd leert de middelwaardestelling nu dat voor alle $x_1 < x_2$ in I

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \geqslant 0 \quad (x_1 < c < x_2)$$

zodat $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$. De functie is bijgevolg stijgend in I.
2. Analoog.
3. Combineer delen 1. en 2.
4. Analoog als voor de 'omgekeerde' implicatie van deel 1. □

3.1.20 Opmerking. De implicatie in deel 4. kan niet omgekeerd worden, zoals men ziet aan het voorbeeld van de functie $f(x) = x^3$ over $I :=]-1, 1[$. Deze functie is strikt stijgend in I, en toch is $f'(0) = 0$.

We stellen nu een regel op die de meeste onbepaaldheden bij limieten oplost. We beginnen met de onbepaaldheid

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0, \qquad \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$$

Als $f'(a)$ en $g'(a)$ bestaan, en als $g'(a) \neq 0$, dan kunnen we de limiet berekenen, want onder deze voorwaarden zijn f en g continu in a, zodat $f(a) = g(a) = 0$ en

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \to a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Omdat deze voorwaarde voor de praktijk te streng is,[7] tonen we een verfijning van dit resultaat aan.

[7] in de praktijk gebeurt het b.v. dikwijls dat $g'(a) = 0$

3.1.21 Toepassing (Regel van de l'Hospital[8] voor rechterlimiet $\frac{0}{0}$). *Veronderstel dat*

1. f' *en* g' *bestaan in een open interval* $]a, a+R[$ $(R > 0)$
2. $f(a+) = g(a+) = 0$
3. $g(x) \neq 0$ *op* $]a, a+R[$
4. $g'(x)$ *heeft een vast teken op* $]a, a+R[$.

Dan hebben we:

$$\boxed{\textit{Als } \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}, \textit{ dan ook } \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.} \tag{3.4}$$

Bewijs. Zij $g'(x) > 0$ op $]a, a+R[$. (Het geval $g'(x) < 0$ verloopt analoog.) Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. De veronderstelling van (3.4) betekent dat er bij deze $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat met

$$A - \varepsilon \leqslant \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant A + \varepsilon \quad \text{als } a < x < a + \delta < a + R.$$

Bijgevolg is

$$(A+\varepsilon)g'(x) - f'(x) \geqslant 0 \quad \text{en} \quad f'(x) - (A-\varepsilon)g'(x) \geqslant 0 \quad \text{als } a < x < a + \delta.$$

De functies $(A+\varepsilon)g(x) - f(x)$ en $f(x) - (A-\varepsilon)g(x)$ zijn dus stijgend in $]a, a+\delta[$. Voor elke $x \in]a, a+\delta[$ is dan (wegens 2.5.3)

$$(A+\varepsilon)g(x)-f(x) \geqslant (A+\varepsilon)g(a+)-f(a+) = 0 \text{ en } f(x)-(A-\varepsilon)g(x) \geqslant f(a+)-(A-\varepsilon)g(a+) = 0.$$

Hieruit volgt dat $(A+\varepsilon)g(x) \geqslant (A-\varepsilon)g(x)$, en dus dat $g(x) \geqslant 0$. Daardoor is

$$A - \varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant A + \varepsilon.$$

Vermits onze x willekeurig in $]a, a+\delta[$ gekozen was, gelden deze ongelijkheden voor alle $a < x < a + \delta$, en dat is de definitie van

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

□

3.1.22 Opmerkingen.

1. Men kan aantonen dat de voorwaarde 4. gelijkwaardig is met de zwakkere voorwaarde dat $g'(x) \neq 0$ op $]a, a+R[$.[9] Daarmee zijn de voorwaarden uit de opgave niets meer dan een opsomming van alles wat men nodig heeft om de formule (3.4) te kunnen opschrijven.

[8] auteur van het eerste leerboek van Analyse, nl. *Analyse des infiniment petits pour l' intelligence des lignes courbes* van 1696. Het wiskundewerk erin was van Johann Bernoulli.

[9] Dit volgt uit een stelling van Darboux die zegt dat een afgeleide van een functie altijd aan de tussenwaardestelling voldoet. Als g' continu is (wat in de praktijk meestal zo is), dan weten we dit wegens 2.4.1.

2. De voorwaarde 3. mag eigenlijk weggelaten worden, want ze is vervuld zodra 4. dat is. Immers, veronderstel eens dat $g(x_0) = 0$ voor een $a < x_0 < a + R$. Dan is $g(x_0-) = g(a+) = 0$, zodat uit de stelling van Rolle zou volgen dat $g'(x_1) = 0$ voor een x_1 tussen x_0 en a. Dit nu is uitgesloten door het gegeven 4.

Een analoge regel bestaat natuurlijk voor linkerlimieten. De combinatie van beide regels geeft

3.1.23 Gevolg (Regel van de l'Hospital voor limiet $\frac{0}{0}$). *Veronderstel dat*

1. f' *en* g' *bestaan over* $]a - R, a + R[\setminus \{a\}$ $(R > 0)$
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
3. $g(x) \neq 0$ *op* $]a - R, a + R[\setminus \{a\}$
4. $g'(x) \neq 0$ *op* $]a - R, a + R[\setminus \{a\}$.

Dan hebben we:

$$\boxed{\text{Als } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}, \text{ dan ook } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.}$$

3.1.24 Opmerking. De voorwaarde 3. mag weggelaten worden.

Een analoge regel bestaat ook voor $x \to \pm\infty$. Het bewijs verloopt analoog (zie ook oef. 3.5.27).

We bekijken nu de onbepaaldheid $\frac{\infty}{\infty}$. Om te illustreren dat de formulering en de bewijzen voor $x \to \pm\infty$ analoog zijn aan die voor $x \to a\pm$, tonen we nu eens het geval $x \to +\infty$ aan (voor de andere gevallen geldt de regel ook, met een analoog bewijs). We bekijken dus de onbepaaldheid

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$$

3.1.25 Toepassing (Regel van de l'Hospital voor limiet $\frac{\infty}{\infty}$). *Veronderstel dat*

1. f' *en* g' *bestaan in een open interval* $]a, +\infty[$ *met* $a \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$
3. $g(x) \neq 0$ *op* $]a, +\infty[$
4. $g'(x)$ *heeft een vast teken op* $]a, +\infty[$.

Dan hebben we:

$$\boxed{\text{Als } \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}, \text{ dan ook } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.} \tag{3.5}$$

Bewijs. We geven het bewijs voor het geval $g(x) \to +\infty$ en $g'(x) > 0$. (Het andere geval verloopt analoog.) Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. De veronderstelling in (3.5) betekent dat

$$A - \varepsilon \leqslant \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant A + \varepsilon \quad \text{als } x \geqslant x_0 > a.$$

Zoals voorheen volgt dat de functies $(A+\varepsilon)g(x)-f(x)$ en $f(x)-(A-\varepsilon)g(x)$ stijgend zijn in $[x_0,+\infty[$. Voor elke $x>x_0$ is dan

$$(A+\varepsilon)g(x)-f(x)\geqslant(A+\varepsilon)g(x_0)-f(x_0)\quad\text{en}\quad f(x)-(A-\varepsilon)g(x)\geqslant f(x_0)-(A-\varepsilon)g(x_0)$$

Wegens $g(x)\to+\infty$ als $x\to+\infty$ is $g(x)>0$ zodra x groot genoeg is. Bijgevolg

$$A-\varepsilon+\frac{f(x_0)-(A-\varepsilon)g(x_0)}{g(x)}\leqslant\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant A+\varepsilon+\frac{f(x_0)-(A+\varepsilon)g(x_0)}{g(x)}$$

voor x groot genoeg. Wegens $g(x)\to+\infty$ is

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x_0)-(A-\varepsilon)g(x_0)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x_0)-(A+\varepsilon)g(x_0)}{g(x)}=0$$

dus

$$\frac{f(x_0)-(A-\varepsilon)g(x_0)}{g(x)}\geqslant-\varepsilon\quad\text{en}\quad\frac{f(x_0)-(A+\varepsilon)g(x_0)}{g(x)}\leqslant\varepsilon$$

als x groot genoeg is. Vandaar

$$A-2\varepsilon\leqslant\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant A+2\varepsilon\quad\text{zodra } x \text{ groot genoeg is.}$$

Dat is de definitie van

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

□

3.1.26 Opmerking. De voorwaarde 3. mag weggelaten worden, want ze is vervuld voor voldoende grote a zodra 2. dat is (door de waarde van a desnoods te vergroten—hetgeen de eisen op f en g verzwakt—blijft de regel—die immers niet van a afhangt—geldig). Voorwaarde 4. is opnieuw gelijkwaardig met de voorwaarde dat $g'(x)\neq 0$ voor $x>a$.

3.1.4 Functies van klasse C^1

Uit voorbeelden blijkt dat een afgeleide functie f' niet noodzakelijk continu is.[10]

3.1.27 Definitie. We noemen f **van klasse C^1** of **glad**[11] of **continu afleidbaar** over een open interval $]a,b[\subseteq\mathcal{D}_f$ als f' bestaat en continu is in elk punt van $]a,b[$.

3.1.28 Definitie. We noemen f **van klasse C^1** of **glad** of **continu afleidbaar** over een *compact* interval $[a,b]\subseteq\mathcal{D}_f$ als f de drie volgende eigenschappen heeft:

1. f is continu over $[a,b]$
2. f' bestaat en is continu over $]a,b[$
3. f' heeft een rechterlimiet in a en een linkerlimiet in b.

[10] Vb.: $x^2\sin\frac{1}{x}$ (zie de oefeningen). Verwar dit niet met het feit dat een afleidbare f automatisch continu is.
[11] Engels: *smooth*

3.1.29 Stelling. *Een functie f is glad over $[a,b]$ juist als f kan uitgebreid worden tot een functie F die glad is over een open interval dat $[a,b]$ omvat, m.a.w. als er een functie F en een open interval $]\alpha,\beta[$ bestaan waarvoor geldt*

1. $[a,b] \subset\,]\alpha,\beta[$
2. *F is van klasse C^1 over $]\alpha,\beta[$ (dus: F' bestaat en is continu in elk punt van $]\alpha,\beta[$)*
3. $F/[a,b] = f/[a,b]$.

Bewijs. Zij f glad over $[a,b]$. Definiëren we $F(x) = f(a) + f'(a+)(x-a)$ voor $x < a$ en $F(x) = f(b) + f'(b-)(x-b)$ voor $x > b$, dan is F een uitbreiding van f die glad is over $\mathbb{R}$, want

$$\lim_{x\to a+} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a+} f'(x) = f'(a+) = \lim_{x\to a-} \frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

zodat $F'(a) = f'(a+)$. Analoog is $F'(b) = f'(b-)$.
Omgekeerd, als er een dergelijke uitbreiding F bestaat, dan is f glad over $[a,b]$. (Ga na bij wijze van oefening. In het bijzonder is $f'(a+) = F'(a)$ en $f'(b-) = F'(b)$.) □

3.1.30 Notatie. De verzameling van alle functies die glad zijn over het interval J (open of gesloten) noteren we als $C^1(J)$.

3.2 Afgeleiden van hogere orde

De afgeleide f' van f kan op haar beurt een afgeleide hebben, die men de afgeleide van **tweede orde** van f noemt, enz. De definitieverzameling van elke nieuwe afgeleide is een deelverzameling (eventueel leeg) van de definitieverzameling van de vorige afgeleide.

3.2.1 Definitie. De afgeleide van nulde orde van f is f zelf.

3.2.2 Notatie. Voor de opeenvolgende afgeleiden van f zijn de volgende notaties gebruikelijk:

$$f \text{ of } f^{(0)}, f', f'', f''', f^{(iv)} \text{ of } f^{(4)}, f^{(v)} \text{ of } f^{(5)}, \ldots, f^{(n)}, \ldots,$$
$$f, Df, D^2f, D^3f, \ldots, D^nf, \ldots$$
$$f, \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, \ldots, \frac{d^nf}{dx^n}, \ldots.$$

In de notaties van het laatste type is er van uitgegaan dat uit de context blijkt dat x de naam is van de onafhankelijk veranderlijke.

3.2.3 Opmerking. *Als $f^{(n)}(a)$ bestaat, dan bestaan ook $f^{(n-1)}(a), \ldots, f'(a)$.* Inderdaad, als $f^{(n)}(a)$ bestaat, dan is dit getal de afgeleide in a van de functie $f^{(n-1)}$. Bijgevolg bestaat de functie $f^{(n-1)}$ in een omgeving van a, in het bijzonder in a zelf, enz.

3.2.4 Definitie. Een functie f is **van klasse C^n** (met $n \in \{1,2,\ldots\}$) over een open interval $]a,b[\, \subseteq \mathcal{D}_f$ als $f^{(n)}$ bestaat en continu is in elk punt van $]a,b[$.

Voor $n = 1$ vinden we de gladde functies terug die al eerder gedefinieerd zijn. Voor $n > 1$ beschouwen we enkel *open* intervallen.

3.2.5 Notatie. De verzameling van alle functies die over het open interval $]a, b[$ van klasse C^n zijn noteert men als $C^n(]a, b[)$.

3.2.6 Definitie. Is $f \in C^n(]a, b[)$ voor elke $n = 1, 2, \ldots$, dan noemen we f **van klasse C^∞** of **onbepaald afleidbaar**[12] over $]a, b[$, en we noteren $f \in C^\infty(]a, b[)$.

3.2.7 Opmerkingen.

1. Als $f^{(n)}$ bestaat op $]a, b[$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, dan is $f \in C^\infty(]a, b[)$: $f^{(n)}$ is op $]a, b[$ immers automatisch continu, want afleidbaar.

2. Is $f \in C^n(]a, b[)$ $(n \in \{1, 2, \ldots\})$, dan ook $f \in C^{n-1}(]a, b[)$.

3.2.8 Notatie. We schrijven $C(J)$ of $C^0(J)$ voor de verzameling van alle functies die continu zijn over het (open of gesloten) interval J.

3.3 Elementaire functies en hun afgeleiden

In deze paragraaf zullen we kort enkele bekende elementaire functies bekijken en hun afgeleiden bepalen. We doen dit op een informele manier, waarbij we vertrouwen op de eigenschappen die de student eerder geleerd heeft over de expontentiële functie, het logaritme, en de trigonometrische functies en die waarschijnlijk niet rigoureus werden geïntroduceerd. Een rigoureuze behandeling voor de constructie van deze functies stellen we uit tot hoofdstuk 6.

3.3.1 De exponentiële en de logaritme

Bij een exponentiële functie verheffen we een constante $a > 0$ tot een macht x. We weten reeds hoe a^x te definiëren wanneer x een natuurlijk getal is. We kunnen namelijk de volgende eenvoudige inductieve definitie gebruiken

$$a^0 := 1 \qquad \text{en} \qquad a^{n+1} := a^n \cdot a, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Voor negatieve gehele getallen definiëren we dan

$$a^{-m} := \frac{1}{a^m}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Om a^x te definiëren wanneer x een rationaal getal is kunnen we de Tussenwaardestelling gebruiken. Via dezelfde redenering als in 2.4.5 toont men het bestaan van $a^{1/n}$ aan, namelijk, als het uniek positief getal waarvan haar $n$de macht gelijk is aan a. Daarna definiëren we

$$a^{m/n} := (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}.$$

De overgang van rationale exponenten naar reële is complexer. Eén mogelijkheid is om een rij van rationale getallen r te nemen die x benaderen en daarna te hopen dat a^x benaderd wordt door a^r, waardoor deze limiet een bevredigende definitie zou geven aan a^x. Met andere woorden, we verwachten dat a^x een continue uitbreiding geeft aan de functie die rationale x afbeeldt op a^x. Deze procedure kunnen we uitwerken via het supremumprincipe, maar het

[12] In het Engels: *infinitely smooth*

vergt veel werk en we kiezen ervoor om dergelijke technische details hier te vermijden[13]. In plaats daarvan veronderstellen we dat a^x reeds geconstrueerd is en beschikt over alle verwachte eigenschappen die we elders geleerd hebben, i.e.,

$$\boxed{a^0 = 1, \qquad a^{x+y} = a^x a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^x, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.}$$

Om verdere eigenschappen van de exponentiële functies te bestuderen volstaat het om de basis a vast te nemen. Het is handig om hiervoor het irrationaal getal e te nemen, met als decimale benadering $e \approx 2,71828182846$. Dit getal kunnen we definiëren als de limiet (zie oef. 3.5.15 en stelling 6.1.16)

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e.$$

We noemen e^x simpelweg de exponentiële functie, en we gebruiken ook de notatie $\exp x := e^x$. De definitie van e leert ons dat voor kleine h we hebben dat $e \approx (1+h)^{1/h}$, zodat $e^h \approx 1+h$. Vervangen we in de volgende berekening e^h met deze benadering, dan vinden we voor $f(x) = e^x$ dat

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(1+h-1)}{h} = e^x.$$

Samengevat, we zien dat de exponentiële functie haar eigen afgeleide is:

$$\boxed{(e^x)' = e^x.}$$

Laat ons nu het beeld van e^x bepalen. Eerst en vooral hebben we dat

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{en} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.} \tag{3.6}$$

De tweede limiet is een eenvoudig gevolg van de eerste: $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{y\to+\infty} 1/e^y = 0$. Om in te zien dat de eerste limiet geldig is, neem een $x > 1$ vast. Zij n het unieke natuurlijke getal zo dat $n \le x < n+1$. In het bijzonder zal $n > x-1$, zodat wegens voorbeeld 1.1.1,

$$x - 1 < n < 2^n < e^x.$$

Uiteraard zal $x-1 \to +\infty$ wanneer $x \to +\infty$, waardoor ook $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Merk op dat e^x altijd een positief getal is, zodat wegens de Tussenwaardestelling en (3.6) het beeld van de exponentiële functie juist $\mathbb{R}^+$ is. Tevens is e^x strikt stijgend, aangezien het een strikt positieve afgeleide heeft $(e^x)' = e^x$ (zie 3.1.19). Bijgevolg is e^x injectief. We besluiten:

$$\boxed{\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad \text{is bijectief.}}$$

We kunnen daarom spreken van de inverse van exp en deze zal afleidbaar zijn wegens 3.1.12.

3.3.1 Definitie. We noteren de inverse van exp als $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dewelke we het **(natuurlijke) logaritme** noemen. Dus het logaritme wordt bepaald door de eigenschappen

$$\ln(e^x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$e^{\ln x} = x, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

[13] We zullen een compleet andere aanpak hanteren in hoofdstuk 6, waar we via de integratietheorie het logaritme zullen construeren om daarmee de exponentiële op te bouwen.

Deze definitie impliceert de gebruikelijke bekende eigenschappen van het logaritme, wiens verificatie we overlaten aan de lezer:

$$\boxed{\ln 1 = 0, \qquad \ln e = 1, \qquad \ln x^z = z \ln x, \qquad \ln(xy) = \ln x + \ln y.}$$

De afgeleide van het logaritme kunnen we vinden via 3.1.12. Nemen we $x = \exp c$, dan zal

$$(\ln x)' = \ln'(\exp c) = \frac{1}{\exp' c} = \frac{1}{\exp c},$$

zodat

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

Tot slot merken we op dat

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad \text{en} \qquad x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Leiden we beide gelijkheden af met betrekking tot de variabele x, dan volgt uit de kettingregel

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a \qquad \text{en} \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}.} \tag{3.7}$$

3.3.2 De hyperbolische functies

Bepaalde combinaties van exponentiëlen komen vaak genoeg voor om ze als afzonderlijke functies te aanzien.

3.3.2 Definitie. De **hyperbolische functies** zijn de **hyperbolische sinus** (ook: **sinus hyperbolicus**), de **hyperbolische cosinus** (ook: **cosinus hyperbolicus**) en de **hyperbolische tangens** (ook: **tangens hyperbolicus**), gedefinieerd als

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}}$$

(Andere notaties zijn sh, ch, th, sinhyp, coshyp, tanhyp.) De eigenschappen van de hyperbolische functies zijn uiteraard onmiddellijke gevolgen van de eigenschappen van de exponentiële functie. Wij groeperen hieronder de belangrijkste eigenschappen.

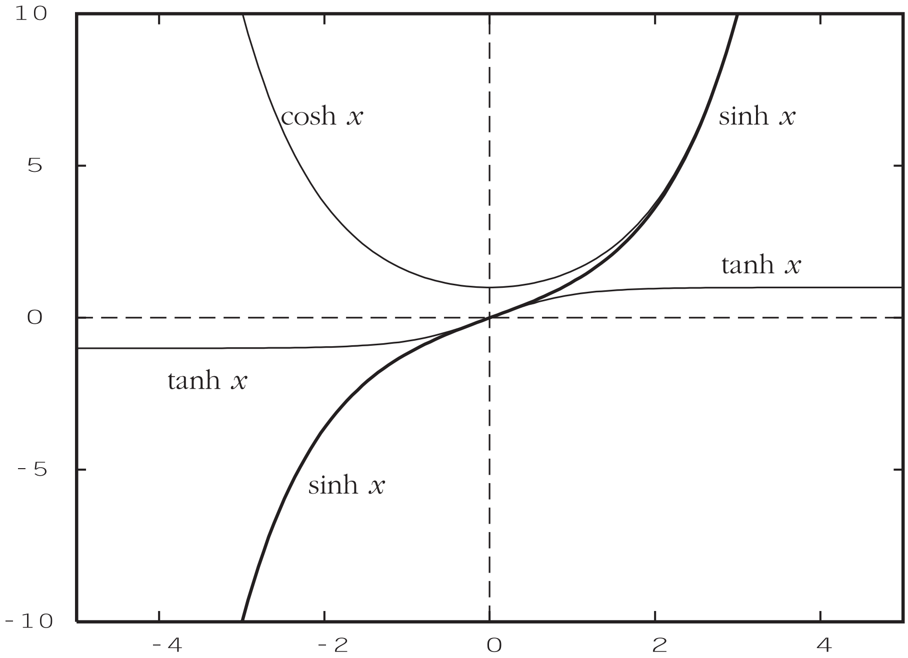
3.3.3 Stelling.

1. *Voor alle* $x \in \mathbb{R}$ *is* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
2. *Voor alle* x *en* y *is*

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

3. *De drie hyperbolische functies zijn over* $\mathbb{R}$ *onbepaald afleidbaar, met in het bijzonder*

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh, \quad \tanh' = \frac{1}{\cosh^2}.$$



Figuur 3.2: De drie hyperbolische functies.

4. sinh *is oneven*[14]*, heeft als domein en waardenverzameling geheel* $\mathbb{R}$*, is strikt stijgend en heeft* $\sinh 0 = 0$.

5. cosh *is even*[15]*, heeft als domein geheel* $\mathbb{R}$*, als waardenverzameling* $[1, +\infty[$*, is strikt dalend in* $]-\infty, 0[$*, strikt stijgend in* $]0, +\infty[$*, en heeft* $\cosh 0 = 1$.

6. tanh *is oneven, heeft als domein geheel* $\mathbb{R}$*, als waardenverzameling* $]-1, 1[$*, is strikt stijgend, en heeft*

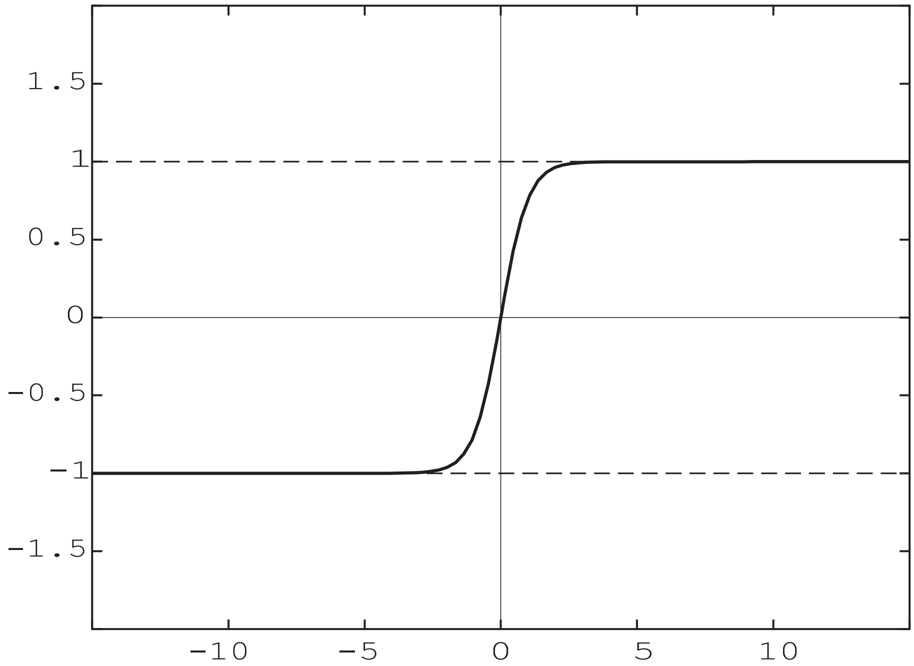
$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1, \qquad \tanh 0 = 0.$$

Bewijs. 1. Uit de definitie.
2.

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y)\end{aligned}$$

en analoog voor de andere formules.

[14]Een functie f is oneven als $f(-x) = -f(x)$ voor elke x in haar domein.
[15]Een functie f is even als $f(-x) = f(x)$ voor elke x in haar domein.



Figuur 3.3: De hyperbolische tangens met asymptoten $y = \pm 1$.

3. Uit

$$\begin{aligned} \sinh' x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\ \cosh' x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \\ \tanh' x &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}. \end{aligned}$$

4. $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x$, zodat sinh oneven is. De definitieverzameling is $\mathbb{R}$ omdat e^x en e^{-x} bestaan voor elke reële x. Omdat

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty - 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 - \infty$$

bereikt sinh elk reëel getal x. Het strikt stijgend karakter volgt uit $\sinh' x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, en $\sinh 0 = (1-1)/2 = 0$.
5. $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$, zodat cosh even is. De definitieverzameling is $\mathbb{R}$ omdat e^x en e^{-x} bestaan voor elke reële x. Wegens $\cosh' x = \sinh x$ is cosh strikt stijgend voor $x > 0$ en strikt dalend voor $x < 0$, met $\cosh 0 = 1$. Verder is $\lim_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty$ (en uiteraard $\lim_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty$), zodat de waardenverzameling $[1, +\infty[$ is.
6. $\tanh(-x) = \sinh(-x)/\cosh(-x) = -\sinh x/\cosh x = -\tanh x$, zodat tanh oneven is. De definitieverzameling is $\mathbb{R}$ omdat $\sinh x$ en $\cosh x \neq 0$ bestaan voor elke reële x. Omdat $\tanh' x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0$, is tanh strikt stijgend over $\mathbb{R}$, en $\tanh 0 = 0$. Verder is

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

en, omdat de functie oneven is,

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1.$$

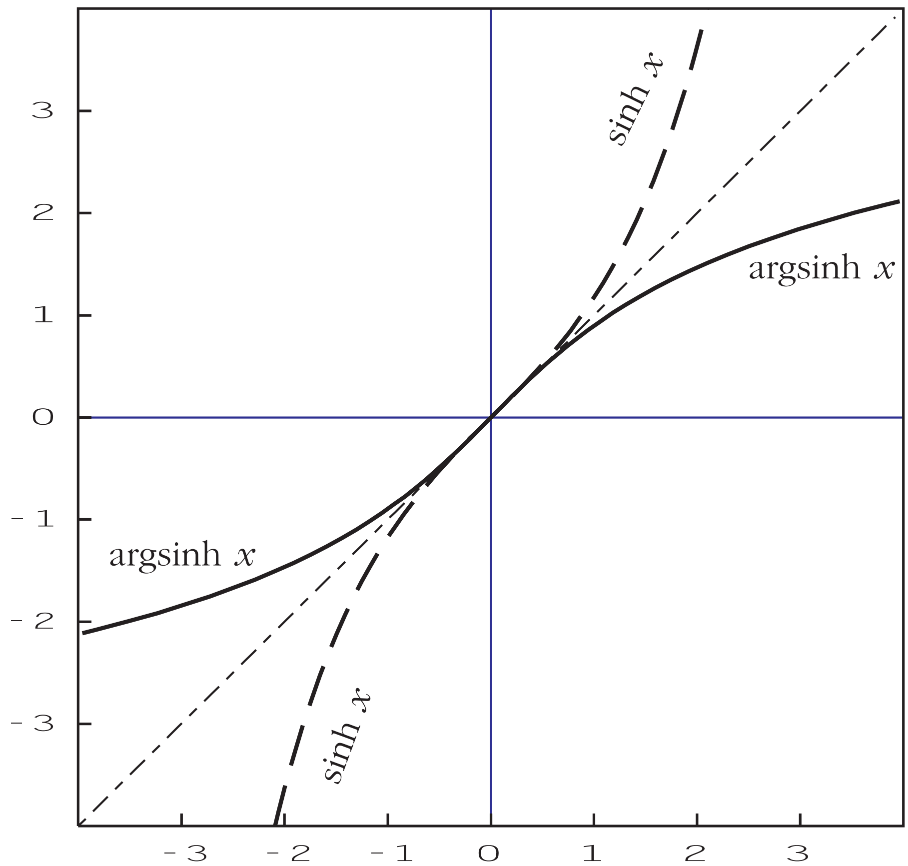
Omdat tanh bovendien strikt stijgend is, impliceert dit dat de waardenverzameling van tanh een deel is van $]-1, 1[$. Wegens de tussenwaardestelling worden alle waarden tussen -1 en $+1$ bereikt. □

3.3.3 De inverse hyperbolische functies

De hyperbolische sinus, met domein en waardenverzameling $\mathbb{R}$, is strikt stijgend en continu, en heeft dus een inverse met dezelfde eigenschappen.

3.3.4 Definitie. De inverse functie van sinh noemt men **argument sinus hyperbolicus**, en wij noteren hiervoor argsinh.

(Andere notaties: asinh, arcsinh, argsh.) De beeldlijn van argsinh ontstaat door de beeldlijn van sinh te spiegelen om de eerste bissectrice.



Figuur 3.4: argsinh als inverse van sinh.

3.3.5 Stelling.

1. *De verwantschap tussen* sinh *en* argsinh *wordt gegeven door*

$$\begin{cases} \sinh(\operatorname{argsinh} x) & = x \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \operatorname{argsinh}(\sinh x) & = x \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

2. *Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is* $\operatorname{argsinh} x$ *het enige getal*[16] *waarvan de hyperbolische sinus gelijk aan x is.*

3. argsinh *heeft domein en waardenverzameling $\mathbb{R}$, is strikt stijgend en heeft* $\operatorname{argsinh} 0 = 0$.

4. *Voor alle reële x is*
$$\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

5. *Voor alle reële x is*
$$\operatorname{argsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Bewijs. 1-3. Uit de definitie van argsinh als inverse.
4. Neem een vaste $x \in \mathbb{R}$. Stellen we $y := \operatorname{argsinh} x$, dan is $\sinh y = x$, d.w.z. $e^y - e^{-y} = 2x$. Dit is gelijkwaardig met de vierkantsvergelijking $e^{2y} - 1 = 2xe^y$, waaruit ondubbelzinnig

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}.$$

(Het negatieve getal $x - \sqrt{x^2+1}$ kan natuurlijk niet $e^y > 0$ zijn.) Zo komen we tot

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

5. Uit $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ leiden we af dat

$$\operatorname{argsinh}' x = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

□

De hyperbolische cosinus is strikt stijgend over het interval $[0, +\infty[$. Noteren we tijdelijk

$$\operatorname{Cosh} := \cosh / [0, +\infty[\,,$$

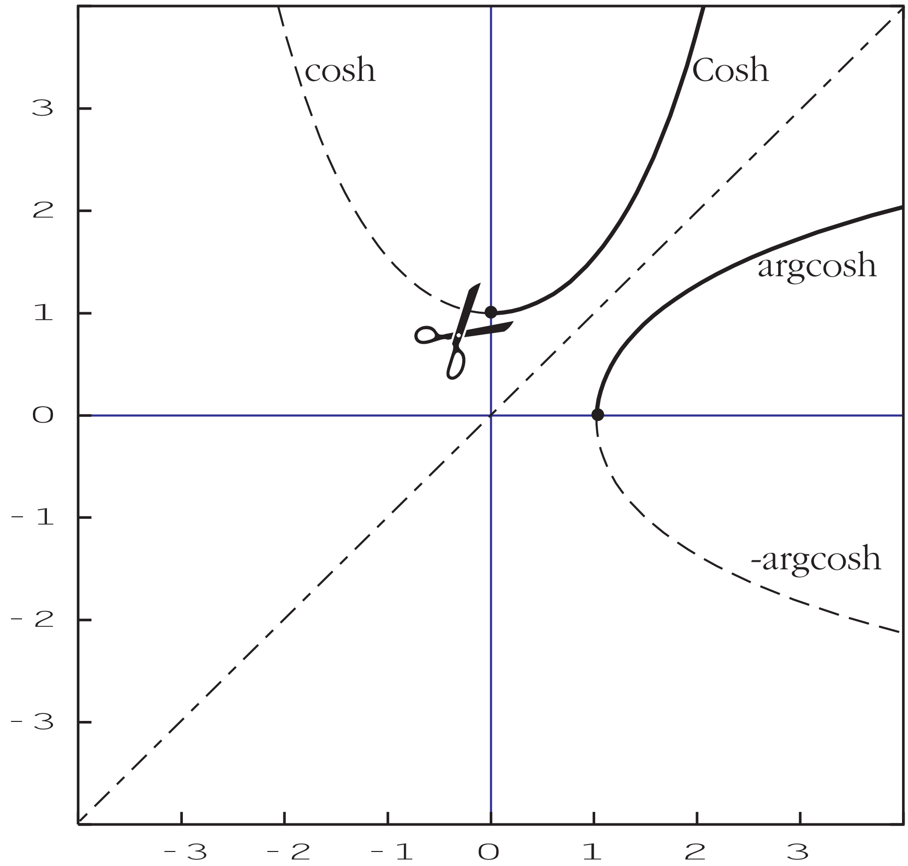
dan is Cosh, met domein $[0, +\infty[$ en waardenverzameling $[1, +\infty[$, strikt stijgend en continu, met een afgeleide $\operatorname{Cosh}' x = \sinh x$ die voor geen enkele $x > 0$ nul is.
Bijgevolg heeft Cosh een inverse met dezelfde eigenschappen (strikt stijgend, continu, afleidbaar voor $x > \operatorname{Cosh} 0 = 1$), waarvan de beeldlijn ontstaat door de beeldlijn van Cosh rond de eerste bissectrice te spiegelen.

3.3.6 Definitie. De inverse

$$\operatorname{argcosh} := (\operatorname{Cosh})^{-1} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[= \operatorname{argcosh}([1, +\infty[)$$

noemen we **argument cosinus hyperbolicus**.

[16] of *argument,* zoals men de veranderlijke in een functievoorschrift $f(x)$ ook wel noemt



Figuur 3.5: argcosh als inverse van Cosh := cosh / $[0, +\infty[$.

(Andere notaties: acosh, arccosh, argch.)

3.3.7 Stelling.

1. *De verwantschap tussen* cosh *en* argcosh *wordt gegeven door*

$$\begin{cases} \cosh(\operatorname{argcosh} x) &= x \quad (x \geqslant 1) \\ \operatorname{argcosh}(\cosh x) &= x \quad (x \geqslant 0) \end{cases}$$

2. argcosh *heeft als domein* $[1, +\infty[$*, als waardenverzameling* $[0, +\infty[$*, is strikt stijgend en heeft* $\operatorname{argcosh} 1 = 0$.

3. *Voor elke* $x \geqslant 1$ *is* $\operatorname{argcosh} x$ *het enige nietnegatieve(!!) getal waarvan de hyperbolische cosinus gelijk aan* x *is.*

4. *Voor alle* $x \geqslant 1$ *is*

$$\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

5. *Voor alle* $x > 1$ *is*

$$\operatorname{argcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Bewijs. 1. Omdat argcosh en Cosh elkaars inverse zijn hebben we

$$\begin{cases} \operatorname{Cosh}(\operatorname{argcosh} x) &= x \quad \text{voor alle } x \in \mathcal{D}_{\text{argcosh}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\} \\ \operatorname{argcosh}(\operatorname{Cosh} x) &= x \quad \text{voor alle } x \in \mathcal{D}_{\text{Cosh}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}. \end{cases}$$

Wat functiewaarden betreft is Cosh = cosh (want enkel de *domeinen* verschillen), zodat het te bewijzen volgt.
2. Uit de definitie van argcosh als inverse.
3. Het getal $\operatorname{argcosh} x$ voldoet aan de vereisten: $\operatorname{argcosh} x \geqslant 0$ en $\cosh(\operatorname{argcosh} x) = x$. Het is het enige getal met die eigenschappen want cosh is strikt stijgend over $[0, +\infty[$.
4. Neem een vaste $x \in [1, +\infty[$. Stellen we $y = \operatorname{argcosh} x$, dan is $\cosh y = x$, d.w.z. $e^y + e^{-y} = 2x$. Dit is gelijkwaardig met de vierkantsvergelijking $e^{2y} + 1 = 2xe^y$, waaruit men twee oplossingen haalt die (het product van de wortels is immers 1) elkaars omgekeerde zijn:

$$e^y = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} \geqslant 1 \quad \text{want } x \geqslant 1 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} \leqslant 1. \end{cases}$$

Nu is $y = \operatorname{argcosh} x \geqslant 0$, dus $e^y \geqslant 1$. Zo vinden we ondubbelzinnig dat

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

waaruit

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

5. Uit $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ leiden we, voor $x > 1$, af dat

$$\operatorname{argcosh}' x = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

□

3.3.8 Opmerkingen.

1. Voor $x > 1$ bestaat er ook een *negatief* getal met een cosh gelijk aan x, namelijk $-\operatorname{argcosh} x$.

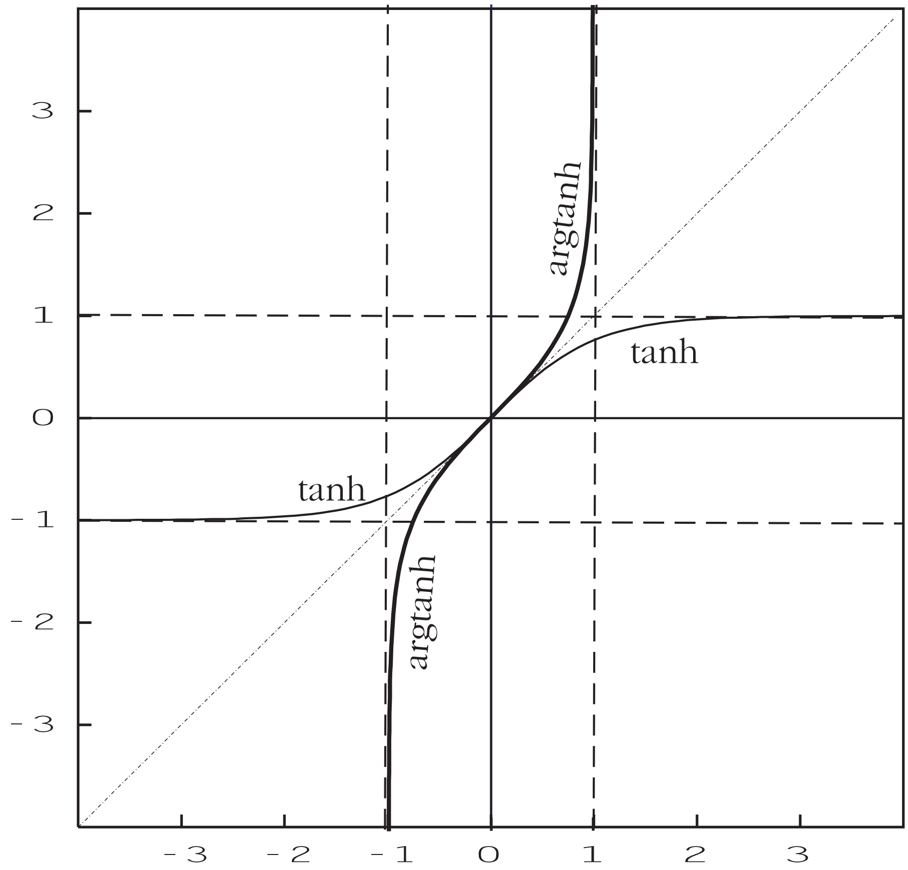
2. argcosh is niet afleidbaar in het punt $x = 1$. De raaklijn aan de beeldlijn is daar evenwijdig met de y-as.

De hyperbolische tangens, met domein $\mathbb{R}$ en waardenverzameling $]-1, 1[$, is strikt stijgend en continu, en heeft dus een inverse met dezelfde eigenschappen.

3.3.9 Definitie. De inverse functie van tanh noemt men **argument tangens hyperbolicus**, en wij noteren hiervoor argtanh.

De beeldlijn van argtanh ontstaat door de beeldlijn van tanh te spiegelen om de eerste bissectrice.

3.3.10 Stelling.



Figuur 3.6: argtanh als inverse van tanh, met verticale asymptoten bij $x = \pm 1$.

1. *De verwantschap tussen* tanh *en* argtanh *wordt gegeven door*

$$\begin{cases} \tanh(\operatorname{argtanh} x) &= x \quad (-1 < x < 1) \\ \operatorname{argtanh}(\tanh x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

2. argtanh *heeft als domein het interval* $]-1, 1[$*, als waardenverzameling* $\mathbb{R}$*, is strikt stijgend en heeft* $\operatorname{argtanh} 0 = 0$.

3. *Voor elke* $x \in]-1, 1[$ *is* $\operatorname{argtanh} x$ *het enige reëel getal waarvan de hyperbolische tangens gelijk aan* x *is.*

4. *Voor alle* $x \in]-1, 1[$ *is*

$$\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

5. *Voor alle* $x \in]-1, 1[$ *is*

$$\operatorname{argtanh}' x = \frac{1}{1-x^2}.$$

Bewijs. 1-3. Uit de definitie van argtanh als inverse.

4. Neem een vaste $x \in \,]-1,1[$. Stellen we $y = \operatorname{argtanh} x$, dan is $\tanh y = x$, d.w.z. $\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x$. Dit is gelijkwaardig met de vergelijking $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$, waaruit

$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

5. Uit $\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ leiden we af dat

$$\operatorname{argtanh}' x = \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

□

Uit de opgestelde formules blijkt dat de inverse hyperbolische functies niet echt nieuwe transcendente functies zijn, maar combinaties van de logaritme, de vierkantswortel (die zelf een bijzondere machtfunctie is) en de elementaire veldbewerkingen $(+,-,\cdot,/)$.

3.3.4 Goniometrische functies

In deze paragraaf berekenen we de afgeleiden van de trigonometrische functies. We beginnen met de sinus en de cosinus. Net zoals bij de exponentiële functie geven we geen rigoureuze wiskundige definitie aan deze twee functies[17]; in plaats daarvan veronderstellen we dat de lezer familiair is met de gebruikelijke meetkundige manier om deze functies te introduceren en zullen we enkel gebruik maken van de 'meetkundig evidente eigenschappen' van de sinus en de cosinus.
We herinneren ons de bekende trigonometrische identiteiten

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x, \quad \cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h.$$

We veronderstellen ook dat het gekend is dat de cosinus continu is in de oorsprong, namelijk,

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1. \tag{3.8}$$

De volgende twee limieten zullen ons in staat stellen om de afgeleiden van de trigonometrische functies te berekenen.

3.3.11 Hulpstelling. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ *en* $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0.$

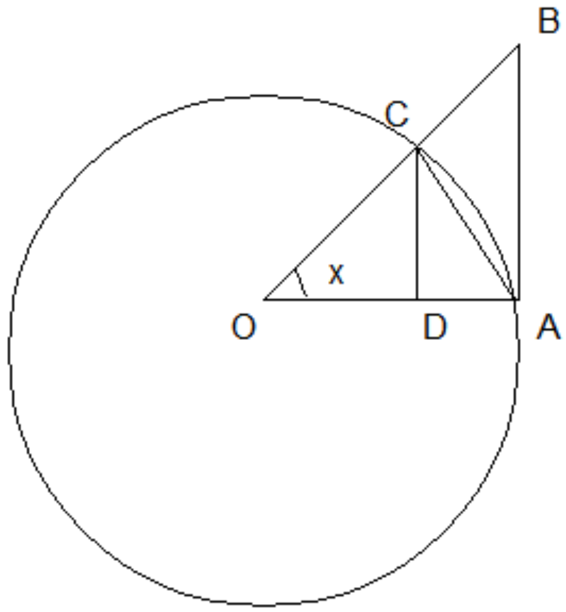
Bewijs. We tonen eerst aan dat $\sin x/x \to 1$ als $x \to 0$ via een meetkundig argument. Aangezien $\sin x/x$ even is, volstaat het enkel de rechterlimiet $x \to 0+$ te bekijken. Beschouw de driehoeken $\triangle OAC$, $\triangle OAB$ en de cirkelsector met middelpuntshoek x zoals in de onderstaande figuur. We kunnen de drie oppervlakten als volgt vergelijken:

$$\operatorname{opp}(\triangle OAC) = \frac{\sin x}{2} \le \operatorname{opp}(\text{sector}) = \frac{x}{2} \le \operatorname{opp}(\triangle OAB) = \frac{\tan x}{2}.$$

Vermenigvuldigen we met 2 en delen we door $\sin x$, dan krijgen we $1 \le x/\sin x \le 1/\cos x$, of equivalent,

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

[17] Een rigoureuze constructie wordt gegeven in hoofdstuk 6.



Dat $\sin x/x \to 1$ als $x \to 0+$ volgt nu uit (3.8) en de sandwich-regel (zie 2.1.10.6). Voor de tweede limiet, merk op dat $\cos(x) = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = 1 - 2\sin^2(x/2)$. Dus,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2(x/2))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x/2)}{x/2} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2 y}{y} = \lim_{y\to 0} y \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 = 0 \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

□

We vinden nu de volgende afgeleiden voor de sinus en de cosinus:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x \qquad \text{en} \qquad (\cos x)' = -\sin x.}$$

Inderdaad, we hebben dat

$$\begin{aligned}\sin' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cos x = 0 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x = \cos x.\end{aligned}$$

Analoog toont men $(\cos x)' = -\sin x$ aan.
Als oefening kan de lezer aantonen dat de afgeleide van de tangens gegeven wordt door

$$\boxed{(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}.} \tag{3.9}$$

Tot slot kunnen we de afgeleiden van de inverse trigonometrische functies berekenen door middel van 3.1.12. We laten de details over aan de lezer en geven simpelweg de formules:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.} \tag{3.10}$$

3.4 Belangrijkste afgeleiden

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (a > 0)$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

$(\operatorname{argsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\operatorname{argcosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\operatorname{argtanh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

3.4.1 Quiz. Waar of niet waar?

1. Als een afleidbare afbeelding $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haar maximum bereikt in een punt $a \in \mathbb{R}$, dan is $f'(a) = 0$.
2. Als $f \in C^1([0,1])$ haar maximum bereikt in een punt $a \in [0,1]$, dan is $f'(a) = 0$.

3.5 Oefeningen

3.5.1 Oefening. Onderzoek afleidbaarheid van de functies uit §2.6.

3.5.2 Oefening. Bereken de afgeleide van de volgende functies in $x = a$:

1. $f(x) = x^3$
   (1) d.m.v. de definitie (2) d.m.v. de regel voor de afgeleide van een product.
2. $f(x) = 1/x$
   (1) d.m.v. de definitie (2) d.m.v. de regel voor de afgeleide van een quotiënt.

3. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ voor $a = 0$, d.m.v. de definitie.

4. $f(x) = \sqrt{x}$, d.m.v. de definitie. (Aanwijzing: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.)

3.5.3 Oefening. Bereken van de volgende functies de afgeleide waar ze bestaat:
(1) $\sin(\sin(\sin x))$ (2) $e^{\sin x}$ (3) $1/\tan x$ (4) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ (5) $\ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
(6) $x - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2} \tan x)$ (7) $\frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right)$ (a en b constant met $ab \neq 0$) (8) $\ln \left|\tan \frac{x}{2}\right|$
(9) $\ln \left|\tan x + \frac{1}{\cos x}\right|$ (10) $\ln \left|x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q}\right|$ (p en q constant) (11) $\arcsin\left(\frac{x - \frac{p}{2}}{\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}}\right)$
(12) $\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$ (13) $\arctan(\tan^2 x)$ (14) $(\ln x)^x$ (15) $x^{\ln x}$ (16) $x^{1/x}$
(17) $\sqrt{1 - x^2} + \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$ (18) $\frac{2}{\sqrt{1 - a^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \tan \frac{x}{2}\right)$ (a constant met $|a| < 1$)
(19) $\arcsin\left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}\right)$ (a constant) (20) $\sin(x^2 + \sin(x^2 + \sin(x^2)))$ (21) $\sin(3\cos(3\sin(3\cos 3x)))$
(22) $\dfrac{1}{x - \frac{2}{x + \sin x}}$.

3.5.4 Oefening. Toon de formules (3.7), (3.9) en (3.10) aan.

3.5.5 Oefening. Toon aan (1) d.m.v. de definitie van afgeleide (2) d.m.v. de kettingregel:

1. als $g(x) = f(x + c)$, dan is $g'(x) = f'(x + c)$
2. als $g(x) = f(cx)$, dan is $g'(x) = cf'(cx)$
3. als f periodiek is met periode p (d.w.z., $f(x + p) = f(p)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$), dan is ook f' periodiek met periode p
4. als f even is (d.w.z., $f(-x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$), dan is f' oneven (d.w.z., $f'(-x) = -f'(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$)

en illustreer dit a.d.h.v. de grafieken van f en g.

3.5.6 Oefening. Bepaal $f'(x)$ (1) als $f(x) = g(x + t)$ (2) als $f(t) = g(x + t)$.

3.5.7 Oefening. Toon aan:

1. $-1 \leqslant \dfrac{a \cos x + b}{a + b \cos x} \leqslant 1$ $(0 < b < a,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi)$
2. $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ $(a > 0)$
3. $\arctan x > x - \frac{x^3}{3}$ $(x > 0)$
4. $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$

3.5.8 Oefening. Bewijs dat de volgende functies constant zijn, en bepaal de constante:
(1) $2\arctan\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \arctan \sqrt{x^2 - 1}$ $(|x| \geqslant 1)$
(2) $\arccos\left(\dfrac{a \cos x + b}{a + b \cos x}\right) - 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}} \tan \dfrac{x}{2}\right)$, $(0 \leqslant x < \pi,\ 0 < b < a$ constant).

3.5.9 Oefening.

1. Toon aan dat $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$ ten hoogste één nulpunt heeft in $[-1, 1]$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
2. Bepaal het aantal nulpunten van $f(x) = x^2 - \cos x$.
3. Toon aan dat $f(x) = 2x^2 - x \sin x - \cos^2 x$ juist twee nulpunten heeft. (Aanwijzing: bepaal eerst een verzameling waarop $f(x) > 0$ door f naar onder af te schatten.)
4. Zij $y \neq 0$ en $n \in \mathbb{N}^+$. Toon aan dat $x^{2n} + y^{2n} = (x+y)^{2n} \iff x = 0$. (Aanwijzing: bekijk $f(x) = x^{2n} + y^{2n} - (x+y)^{2n}$.)
5. Zij $y \neq 0$ en $n \in \mathbb{N}^+$. Toon aan dat $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)^{2n+1} \iff x = 0$ of $x + y = 0$

(Aanwijzing: gebruik het stijgend of dalend zijn van f. Soms kan stelling 3.1.17 de redenering verkorten.)

3.5.10 Oefening. Als $f'(x) = \frac{1}{x}$ voor alle $x > 0$ en $f(1) = 0$, toon dan aan dat $f(xy) = f(x) + f(y)$ voor alle $x, y > 0$. (Aanwijzing: bereken de afgeleide van $g(x) = f(xy)$.)

3.5.11 Oefening. Zij $n \in \mathbb{N}^+$. Toon aan dat de k-de afgeleide van x^n gelijk is aan $\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ $(k \leqslant n)$ en van x^{-n} gelijk is aan $(-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} x^{-n-k}$ $\quad(k \in \mathbb{N}, x \neq 0)$.

3.5.12 Oefening (Formule van Leibniz)**.** Als $f^{(n)}(a)$ en $g^{(n)}(a)$ bestaan, toon dan aan dat

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

3.5.13 Oefening. Toon aan dat er voor elke $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ gehele constanten $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ bestaan waarvoor

$$\begin{cases} \tan^{(2n)} x & = \sin x \left(\frac{a_1}{\cos^3 x} + \frac{a_2}{\cos^5 x} + \cdots + \frac{a_n}{\cos^{2n+1} x} \right) \\ \tan^{(2n-1)} x & = \frac{b_1}{\cos^2 x} + \frac{b_2}{\cos^4 x} + \cdots + \frac{b_n}{\cos^{2n} x}. \end{cases}$$

3.5.14 Oefening. Bereken met behulp van de regel van de l'Hospital

1. $\lim\limits_{x \to \infty} x a^x \qquad (|a| < 1)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sinh x}{x}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x^2}$

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^m - 1 - mx}{x} \qquad (m \in \mathbb{Z})$

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a^2+x} - a}{x} \qquad (a > 0)$

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \tan x}{1 - \cos x}$

10. $\lim_{x\to 0+} x \ln(\sin x)$

11. $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)} - x)$

12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\sin^2 x}$

13. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} \qquad (n \in \mathbb{N})$

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n e^{1/x^2}} \qquad (n \in \mathbb{N})$ (Aanwijzing: onderscheid n even en n oneven.)

15. $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2}\right)^x \qquad (a, b > 0)$
(Aanwijzing: bereken de limiet van de logaritme van de functie.)

3.5.15 Oefening. Leidt uit oefening 3.5.14.2 en de continuïteit van e^x in $x = 0$ af dat

$$\lim_{t\to 0+} (1+t)^{1/t} = e.$$

3.5.16 Oefening (Oefeningen op de middelwaardestelling)**.**

1. Als $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, toon dan aan dat $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ voor zekere $x \in\ ]0, 1[$.

2. Als f een functie is die n keer afleidbaar is op een open interval I en die $n+1$ verschillende nulpunten heeft in I, toon dan aan dat $f^{(n)}(x) = 0$ voor een zekere $x \in I$.

3. Toon aan dat $\frac{1}{\sqrt{66}} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$.

3.5.17 Oefening.

1. Zij $f(x) = \begin{cases} x^n, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ Toon aan dat $f^{(n-1)}(0) = 0$, maar dat $f^{(n)}(0)$ niet bestaat.

2. Zij $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ Toon aan dat $f^{(n)}(0) = 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.
(Aanwijzing: $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n e^{1/x^2}} = 0$ (oef. 3.5.14).)

3.5.18 Oefening.

1. Als f afleidbaar is in a, toon dan aan dat de raaklijn de grafiek is van de functie $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

2. Bereken $d(x) := f(x) - g(x)$ voor de veeltermen x, x^2, x^3 en x^4.

Als je de oplossing van het vorige deel ontbindt in factoren, dan vind je dat $(x-a)^2$ steeds een factor is van $d(x)$. Deze eigenschap geldt dus al voor alle veeltermen f van graad $\leqslant 4$. We tonen nu aan dat ze voor alle veeltermen geldt:

1. Toon aan dat $d(a) = d'(a) = 0$.

2. Leid eruit af: als f een veelterm is, dan is $d(x) = (x-a)q(x)$ met q een veelterm, en $q(a) = 0$.

3. Leid eruit af: als f een veelterm is, dan is $d(x) = (x-a)^2 p(x)$ met p een veelterm.

Men noemt a een **tweevoudig nulpunt** van de veelterm d.

3.5.19 Oefening. Toon aan dat de raaklijn aan de grafiek van $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$ in het punt $a \in \,]-1, 1[$ de grafiek van f enkel snijdt in het punt $(a, \sqrt{1-a^2})$ (overeenkomstig de meetkundige definitie van de raaklijn aan een cirkel).

3.5.20 Oefening. Een functie f wordt **Lipschitz-continu** van orde α genoemd in x als een constante c bestaat zo dat

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c|x-y|^\alpha$$

voor elke $y \in \,]x-\delta, x+\delta[$ (zekere $\delta > 0$).

1. Als f Lipschitz-continu van orde $\alpha > 0$ is in x, toon dan aan dat f continu is.

2. Als f afleidbaar is in x, toon dan aan dat f Lipschitz-continu is van orde 1.

3. Als f Lipschitz-continu is van orde 1, is dan f afleidbaar in x?

3.5.21 Oefening (Leibniz notatie)**.** Als f afleidbaar is, is dan $\left.\frac{df(cx)}{dx}\right|_{x=b} = c\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=cb}$?

3.5.22 Oefening (Vraagstukken)**.**

1. Een schijfvormig voorwerp neemt toe in grootte op zo'n manier dat op een bepaald moment de straal $r = 2m$, en de groeisnelheid op dat moment $4m/s$ is. Wat is op dat moment de groeisnelheid van de oppervlakte S van het voorwerp? (Aanwijzing: $S = \pi r^2$.)

2. Twee concentrische schijfvormige voorwerpen veranderen van grootte op zo'n manier dat de oppervlakte tussen beide op elk moment $9\pi m^2$ is. De groeisnelheid van de oppervlakte van de grootste cirkel is op een bepaald moment $10\pi m^2/s$. Hoe snel groeit de omtrek O van de kleinste schijf als op dat moment z'n oppervlakte $16\pi m^2$ is? (Aanwijzing: $O = 2\pi r$.)

3. De snelheidslimiet op een weg is bepaald voor elke afstand x van het begin van de weg, we noteren dit getal als $L(x)$. L is dus een functie van de afstand x. Twee auto's A en B rijden op deze weg. Noem $x_A(t)$ (resp. $x_B(t)$) de afstand die auto A (resp. auto B) langs de weg afgelegd heeft op tijdstip t.

    (a) Welke gelijkheid drukt uit dat auto A altijd aan de snelheidslimiet rijdt?

(b) Neem aan dat A aan de snelheidslimiet rijdt en dat de afgelegde afstand van B op tijdstip t gelijk is aan de afgelegde afstand van A op tijdstip $t-1$. Toon aan dat B ook altijd aan de snelheidslimiet rijdt.

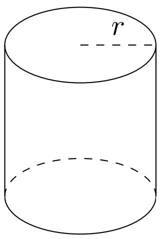
(c) Neem aan dat A aan de snelheidslimiet rijdt en dat B altijd een constante afstand c achter A rijdt. Onder welke voorwaarden rijdt B ook altijd aan de snelheidslimiet?

4. Zij (x_0, y_0) een punt in het vlak en L de rechte met vergelijking $y = mx + b$.

   (a) Vind onder alle punten op L het punt (x_1, y_1) waarvoor de afstand tussen (x_0, y_0) en (x_1, y_1) het kleinst is. (Aanwijzing: de afstand is minimaal juist als het kwadraat van de afstanden minimaal is.)

   (b) Controleer dat de rechte door (x_0, y_0) en (x_1, y_1) loodrecht staat op L. (Aanwijzing: twee rechten staan loodrecht op mekaar als hun richtingscoëfficiënten m_1, m_2 voldoen aan $m_1 m_2 = -1$.)

5. Toon aan dat van alle rechthoeken met een gegeven omtrek het vierkant de grootste oppervlakte heeft.

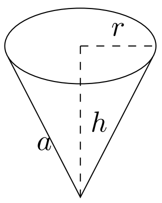
6. 

   (a) Een fabrikant van conservenblikken wil zo weinig mogelijk materiaal gebruiken om cilindervormige blikken met een gegeven inhoud te produceren. Toon aan dat het conservenblik een minimale oppervlakte heeft als de hoogte h even groot is als de diameter $2r$ van het grond- en bovenvlak.

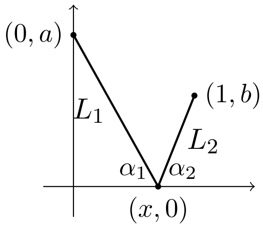
   (b) In twee blikken met $h = 2r$ kan evenveel volume als in één blik met $h = 4r$ (voor dezelfde waarde van r), terwijl de oppervlakte van het grote blik kleiner is dan die van de twee kleine blikken samen. Is dit niet in strijd met deel (a) waar we vonden dat blikken met $h = 2r$ efficiënter zijn dan blikken met $h = 2r$?

   (c) De 'duale' voorwaarde voor efficiënt materiaalgebruik is zoeken naar een maximale inhoud voor een cilindervormig blik met een gegeven oppervlakte. Ga na dat je dezelfde voorwaarde $h = 2r$ vindt.

   (*) Is het toeval dat we twee keer dezelfde voorwaarde vinden?

7. 

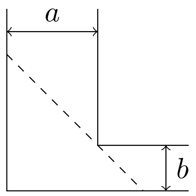
   Een rechthoekige driehoek waarvan de schuine zijde een gegeven lengte a heeft, wordt gewenteld rond een van haar rechte zijden. Toon aan dat van alle zulke kegels de inhoud maximaal is als de straal r van het grondvlak gelijk is aan $\sqrt{2}$ keer de hoogte h.

8. 

   Zij $a, b > 0$. Noem L_1 het lijnstuk dat de punten $(x, 0)$ en $(0, a)$ in het vlak verbindt en L_2 het lijnstuk dat $(x, 0)$ en $(1, b)$ verbindt. Toon aan dat het punt $(x, 0)$ waarvoor de som van de afstanden van de lijnstukken L_1 en L_2 minimaal is, voldoet aan $\alpha_1 = \alpha_2$, waarbij α_j de hoek is die het lijnstuk L_j maakt met de horizontale as (zie figuur).

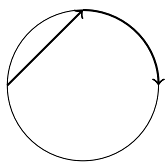
(Aanwijzing: noem $f(x)$ de som van de afstanden; interpreteer de uitdrukking voor

$f'(x)$ in functie van de hoeken α_1 en α_2. Je hoeft x niet op te lossen uit de vergelijking $f'(x) = 0$.)

9. 

(a) Twee gangen hebben breedtes a en b en maken een rechte hoek met mekaar. Wat is de grootste lengte van een ladder die horizontaal rond de hoek gedragen kan worden? (Je mag hier aannemen dat de gangen niet zo ultrakort zijn dat elke ladder erdoor past.)

(b) Vergelijk je oplossing voor het geval $a = b$ met wat je intuïtief verwacht.

10. 

Een man wil aan het diametraal tegenovergesteld punt van een rond meer geraken. Bij zijn vertrekpunt ligt een roeiboot. Hij stapt aan 5 km/u en roeit aan 2,5 km/u. Wat is de snelste van alle routes waarbij hij eerst een eind roeit en dan een eind langs de kade wandelt (zoals op de figuur) om het eindpunt te bereiken? (Aanwijzing: je vindt de snelste route niet door de afgeleide 0 te stellen. Verklaar.)

3.5.23 Oefening.

1. Gegeven zijn functies f en g die afleidbaar zijn in a met $f'(a) = g'(a)$. Als $f(a) = h(a) = g(a)$ en $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}$, toon dan aan dat ook h afleidbaar is in a met $h'(a) = f'(a) = g'(a)$. (Aanwijzing: stelling stelling 2.1.10.6.)

2. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de voorwaarde $f(a) = h(a) = g(a)$ niet mag weggelaten worden.

3.5.24 Oefening.

1. Als $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0$, toon dan aan dat f een lokaal maximum bereikt in a.

2. Als $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$, toon dan aan dat f een lokaal minimum bereikt in a.

(Aanwijzing: stelling 3.1.7.)

3.5.25 Oefening. Als $f'(x) \geqslant M$ op $[a, b]$ $(b > a)$, toon dan aan dat $f(b) \geqslant f(a) + M(b - a)$.

3.5.26 Oefening.

1. Als $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ en $\lim_{x\to+\infty} f'(x) \in \mathbb{R}$, toon dan aan dat $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. (Aanwijzing: oef. 3.5.25.)

2. Geef een voorbeeld van een afleidbare functie f waarvoor $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ bestaat, maar waarvoor $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ niet bestaat.

3.5.27 Oefening. Toon de regel van de l'Hospital aan voor $\lim_{x\to+\infty}$, geval $(\frac{0}{0})$, d.m.v. de regel van de l'Hospital voor $\lim_{x\to a+}$, geval $(\frac{0}{0})$. (Aanwijzing: bekijk de limiet $\lim_{x\to 0+} \frac{f(1/x)}{g(1/x)}$.)