WISKUNDE voor bedrijfskundigen I-A
Theorie

Bachelor of Science in de handelswetenschappen
Schakelprogramma tot Master of Science in de handelswetenschappen
Universiteit Gent

Philippe Carette

Academiejaar 2019-2020

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Reële functies van één variabele

1.1 Algemene begrippen

We verwijzen naar bijlage A voor de betekenis van de gebruikte symbolen.

Onderstel dat A en B twee deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. Een *functie van A naar B* is een wiskundige regel of rekenvoorschrift, waarmee voor elke waarde $x \in A$ *ten hoogste één* waarde $y \in B$ wordt berekend. Zo'n functie stelt men voor met een *voorschrift*:

$$f : A \to B : x \mapsto y = f(x).$$

Hierbij wordt x het *argument* of de *onafhankelijke variabele* genoemd en y het *beeld van x onder f* of de *afhankelijke variabele*. De verzameling A heet *bronverzameling* en de verzameling B de *doelverzameling* van de functie f.

Een functie kan opgevat worden als een 'machine' die de input (x) omvormt tot output (y) .

De verzameling van alle inputwaarden x, die een beeld onder f bezitten, wordt het *domein* van f genoemd en genoteerd als $\operatorname{dom} f$:

$$\operatorname{dom} f = \{x \in A \,|\, \exists y \in B : y = f(x)\}\,.$$

De verzameling van alle outputwaarden y, die het beeld zijn onder f van een zekere x, wordt het *beeld* van f genoemd en genoteerd als $\operatorname{bld} f$:

$$\operatorname{bld} f = \{y \in B \,|\, \exists x \in A : y = f(x)\}\,.$$

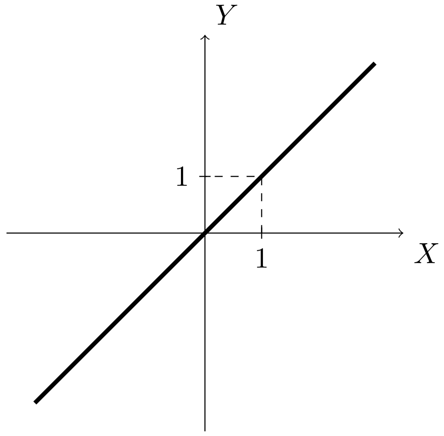
Als we het vlak voorzien van een (doorgaans orthonormaal) XY-assenstelsel, kan men de functie f visualiseren door middel van haar *grafiek*. De grafiek van f is de verzameling van de punten in het XY-vlak met coördinaten $(x, f(x))$, waarbij $x \in \operatorname{dom} f$. Bij een functie treedt er boven elk punt van de X-as hoogstens één grafiekpunt op, omdat elke $x \in \mathbb{R}$ hoogstens één beeld onder f bezit.

Men zegt dat x_0 een *nulpunt* is van de functie f als en slechts als $f(x_0) = 0$. Nulpunten van f komen overeen met de abscissen[1] van de snijpunten van de grafiek van f met de X-as.

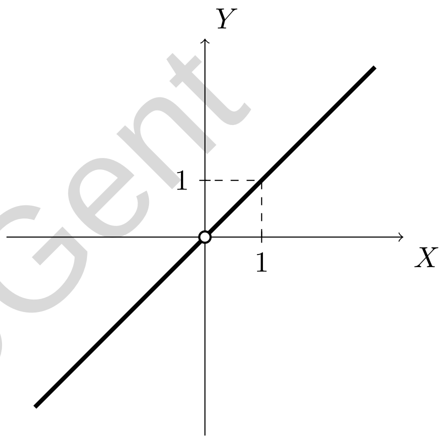
[1] De *abscis* van een punt in een coördinatenvlak is de x-coördinaat van dat punt. De y-coördinaat heet *ordinaat*.

Voorbeelden

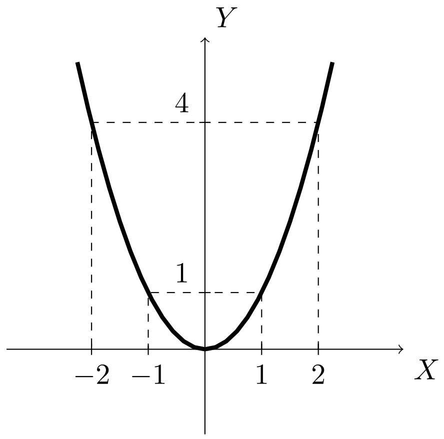
- $f_1(x) = x$
  heet de *identieke functie* op $\mathbb{R}$



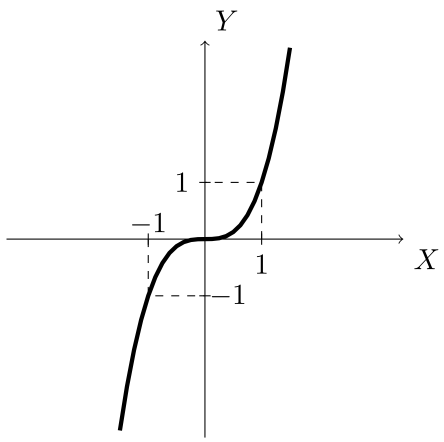
- $f_2(x) = \dfrac{x^2}{x}$
  heeft als domein $\mathbb{R}_0$



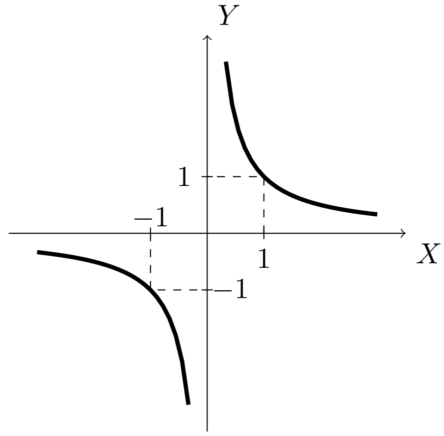
- $f_3(x) = x^2$
  bepaalt een parabool



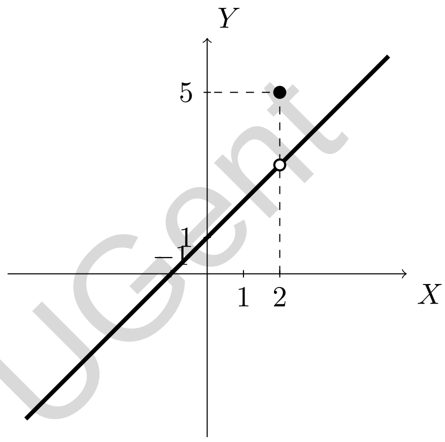
- $f_4(x) = x^3$



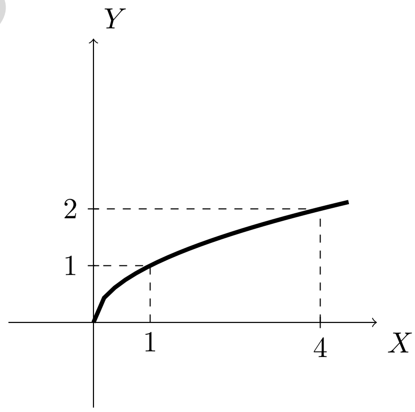
- $f_5(x) = \dfrac{1}{x}$
  bepaalt een hyperbool



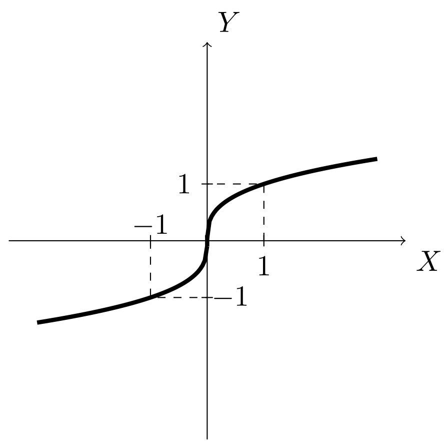
- $f_6(x) = \begin{cases} x+1 & \text{als } x \neq 2 \\ 5 & \text{als } x = 2 \end{cases}$



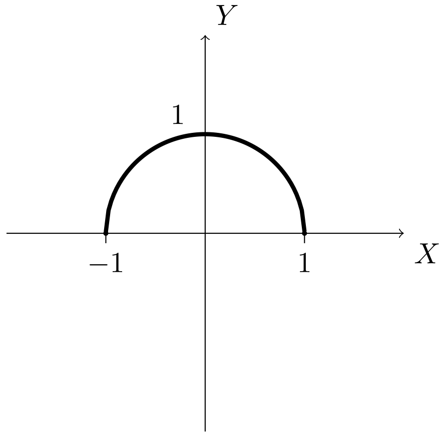
- $f_7(x) = \sqrt{x}$



- $f_8(x) = \sqrt[3]{x}$



- $f_9(x) = \sqrt{1-x^2}$
  bepaalt een halve cirkel



Een functie f wordt volledig bepaald door de vergelijking

$$y = f(x)$$

die men het *voorschrift* noemt van de functie. Men zegt dat in dit geval de functie *expliciete* gedefinieerd is.

In tegenstelling tot expliciet gedefinieerde functies, kan men ook een functie op een *impliciete* wijze bepalen. Hierbij zijn de onafhankelijke variabele x en afhankelijke variabele y verbonden door een vergelijking, zoals bijvoorbeeld $xy + x^2 - y = 0$. Wil de impliciete uitdrukking $F(x, y) = 0$ een functie definiëren, dan moet bij elke waarde van x hoogstens één y-waarde horen zodat de vergelijking $F(x, y) = 0$ opgaat. Zo bepaalt de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ geen functie, want bij $x \in]0, 1[$ horen meer dan één y-waarde, nl. $y = \sqrt{1-x^2}$ en $y = -\sqrt{1-x^2}$.

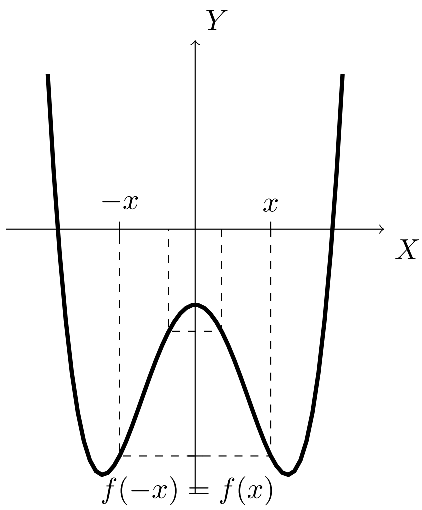
Een functievoorschrift kan *enkelvoudig* zijn, maar ook *meervoudig* (zie de functie f_6 hierboven).

1.2 Bijzondere functies

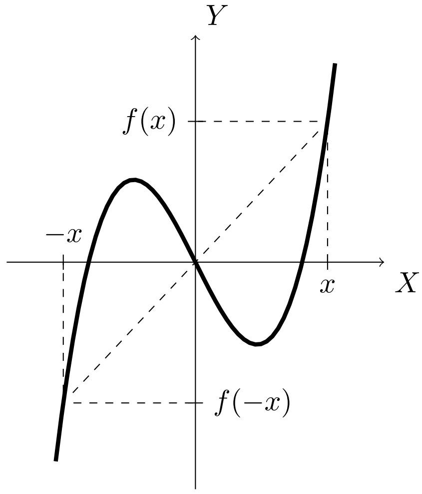
Even functie

$$\text{Een functie } f \text{ wordt een } \textit{even} \text{ functie genoemd}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall x \in \text{dom} f : \quad -x \in \text{dom} f \quad \text{en} \quad f(-x) = f(x)$$

De grafiek van een even functie is symmetrisch t.o.v. de Y-as.



Oneven functie



$$\text{Een functie } f \text{ wordt een \textit{oneven} functie genoemd}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall x \in \operatorname{dom} f: \quad -x \in \operatorname{dom} f \quad \text{en} \quad f(-x) = -f(x)$$

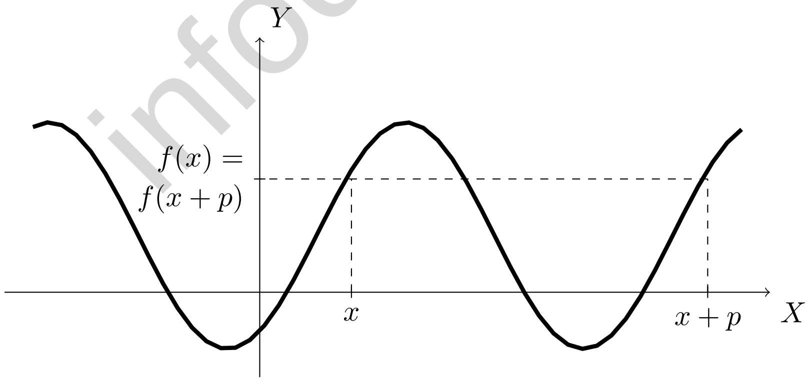
De grafiek van een oneven functie is puntsymmetrisch t.o.v. de oorsprong van het assenstelsel.

Periodieke functie

$$\text{Een functie } f \text{ wordt \textit{periodiek met periode} } p \in \mathbb{R}_0^+ \text{ genoemd}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall x \in \operatorname{dom} f: \quad x + p \in \operatorname{dom} f \quad \text{en} \quad f(x+p) = f(x)$$

Als p een periode is van f, dan kan men gemakkelijk aantonen dat $2p, 3p, 4p, \ldots$ eveneens periodes van f zijn. De kleinste periode van een periodieke functie wordt *primitieve periode* genoemd.

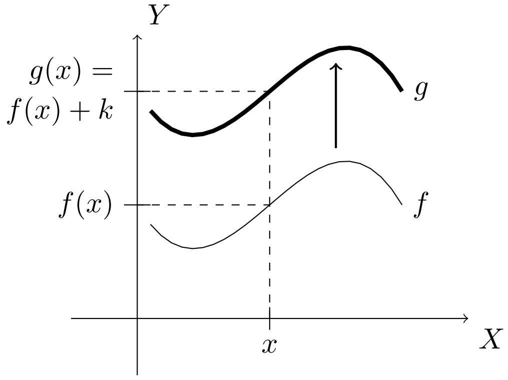
Tekent men het deel van de grafiek van een periodieke functie f met periode p in een willekeurig interval $]\,x_0, x_0 + p\,[\, \subset \operatorname{dom} f$, dan vindt men het deel van de grafiek in het interval $]\,x_0+p, x_0+2p\,[$ door de eerste deelgrafiek evenwijdig met de X-as te verschuiven over een afstand p.

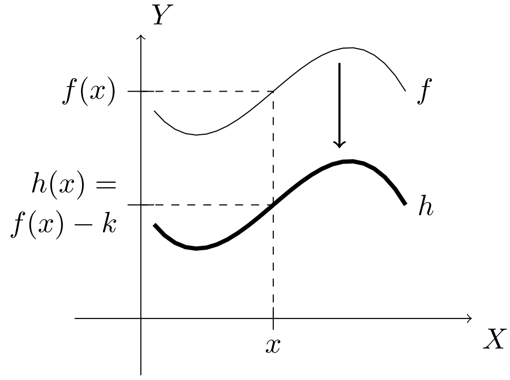


1.3 Functies transformeren

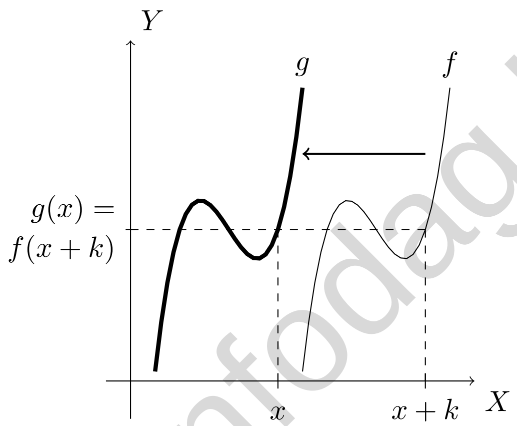
Als we de input of de output van een functie op een bepaalde manier veranderen, bekomen we een nieuwe, getransformeerde, functie. We beschouwen de volgende transformaties:

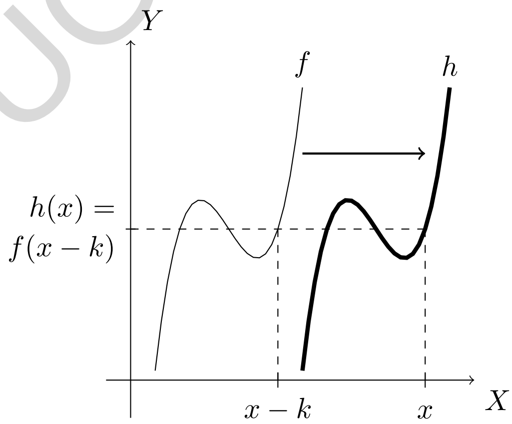
Verticale verschuiving Onderstel $k > 0$. De grafiek van $y = g(x) = f(x) + k$ is de verschoven grafiek van $y = f(x)$, parallel met de Y-as en k eenheden omhoog. De grafiek van $y = h(x) = f(x) - k$ is de verschoven grafiek van $y = f(x)$, parallel met de Y-as en k eenheden omlaag.



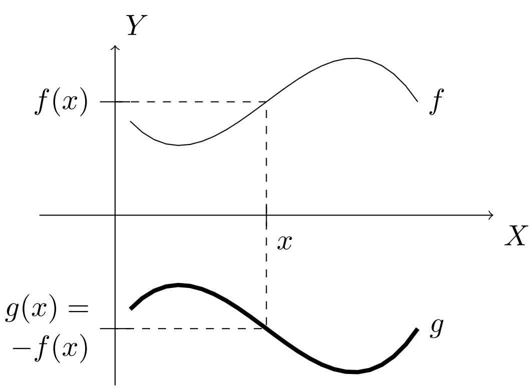


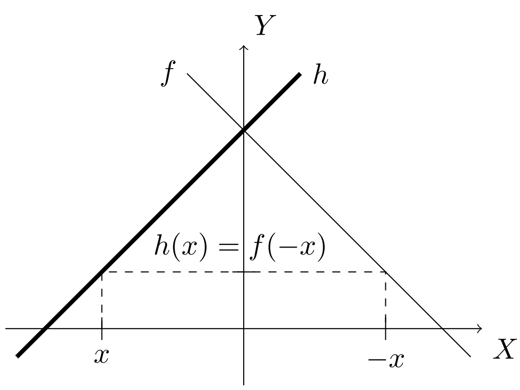
Horizontale verschuiving Onderstel $k > 0$. De grafiek van $y = g(x) = f(x + k)$ is de verschoven grafiek van $y = f(x)$, parallel met de X-as en k eenheden naar links. De grafiek van $y = h(x) = f(x - k)$ is de verschoven grafiek van $y = f(x)$, parallel met de X-as en k eenheden naar rechts.



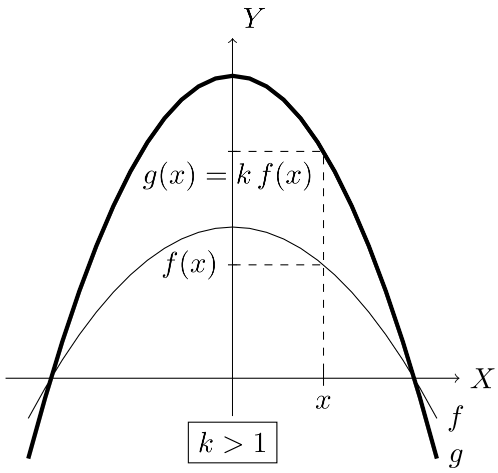


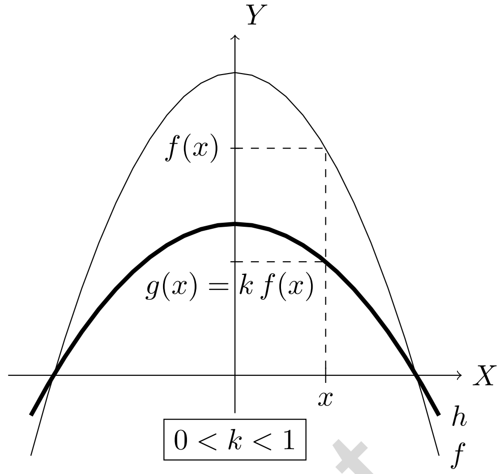
Spiegeling over een coördinaatas De grafiek van $y = g(x) = -f(x)$ is het spiegelbeeld over de X-as van de grafiek van $y = f(x)$. De grafiek van $y = h(x) = f(-x)$ is het spiegelbeeld over de Y-as van de grafiek van $y = f(x)$.



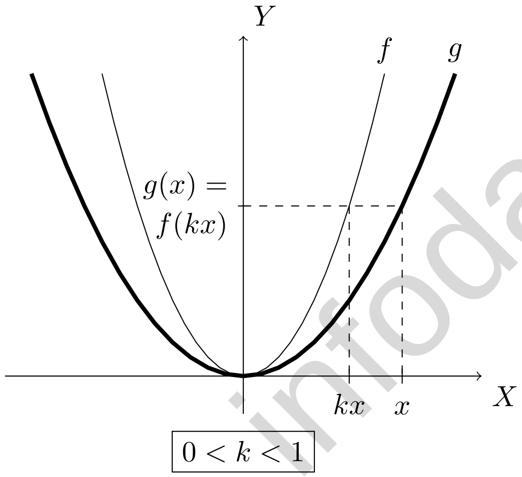


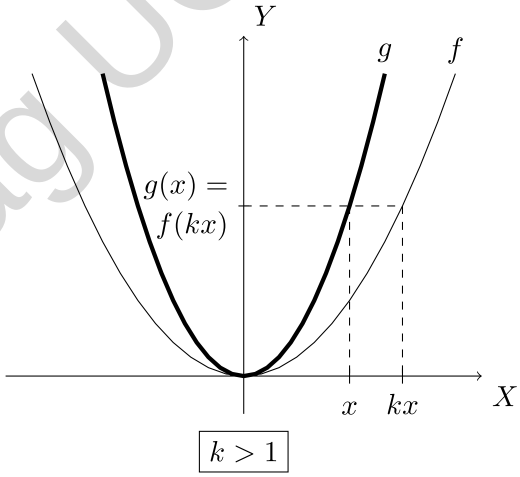
Verticale rek en samendrukking Onderstel $k > 0$. De grafiek van $y = g(x) = k\,f(x)$ ontstaat door de grafiek van $y = f(x)$ met een factor k parallel met de Y-as te rekken als $k > 1$ of samen te drukken als $0 < k < 1$.





Horizontale rek en samendrukking Onderstel $k > 0$. De grafiek van $y = g(x) = f(kx)$ ontstaat door de grafiek van $y = f(x)$ parallel met de X-as te rekken met een factor $\frac{1}{k}$ als $0 < k < 1$, of samen te drukken met een factor k als $k > 1$.





Voorbeeld

Met welke transformatie(s) bekomt men de functie $y = 2(1-x)^3 + 5$ uit de functie $y = x^3$?

Oplossing. Stel $f(x) = x^3$ en $g(x) = 2(1-x)^3 + 5$. Zoals bij het schillen van een ui, ontdoen we de functie g van haar 'schillen' tot de functie f bloot ligt. Elke 'schil' stelt een bewerking of transformatie voor.

1. Verticale verschuiving met 5 eenheden:

$$g(x) = g_1(x) + 5 \quad \text{met } g_1(x) = 2(1-x)^3$$

2. Verticale rek met factor 2:

$$g_1(x) = 2\,g_2(x) \quad \text{met } g_2(x) = (1-x)^3$$

3. Spiegeling t.o.v. de Y-as:

$$g_2(x) = g_3(-x) \quad \text{met } g_3(x) = (1+x)^3$$

4. Horizontale verschuiving van 1 eenheid naar links:

$$g_3(x) = f(x+1).$$

Om de functie g te bekomen uit f doorlopen we bovenstaande transformaties in omgekeerde zin: $f \to g_3 \to g_2 \to g_1 \to g$. ◄

1.4 Functies samenstellen

Beschouw twee functies f en g. Als we de output van de functie f gebruiken als input bij de functie g, verkrijgen we een nieuwe functie –noem deze h– met als voorschrift

$$h(x) = g(f(x))$$

We noteren deze functie h als $g \circ f$ (lees:“g na f”).

Bijvoorbeeld, als $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = x^2 + 3$, dan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 3 = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3,$$

terwijl

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 + 3}.$$

Uit dit voorbeeld blijkt dat bij het samenstellen van functies de volgorde belangrijk is. Voor willekeurige functies f en g zal $g \circ f$ meestal verschillen van $f \circ g$.

1.5 Inverse functie

Beschouw een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = f(x)$. Het is belangrijk om zich af te vragen met welk rekenvoorschrift de onafhankelijke variabele x opnieuw uit de afhankelijke variabele y kan worden verkregen.

De functie

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto x = g(y)$$

heet *inverse functie*, of kortweg *inverse* van f, indien

$$\forall x \in \operatorname{dom} f : g(f(x)) = x \quad \text{en} \quad \forall y \in \operatorname{dom} g : f(g(y)) = y,$$

of nog,

$$g \circ f = \mathrm{id}_{\operatorname{dom} f} \quad \text{en} \quad f \circ g = \mathrm{id}_{\operatorname{dom} g}$$

waarbij de notatie id_A staat voor de identieke functie op de verzameling A:

$$\mathrm{id}_A : A \to A : x \mapsto x.$$

De inverse functie van f wordt aangeduid met de notatie f^{-1}. Uit de definitie van inverse functie volgen meteen:

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{bld}\, f \quad \text{en} \quad \mathrm{bld}\, f^{-1} = \mathrm{dom}\, f.$$

Het voorschrift van de inverse functie, nl. $x = f^{-1}(y)$, wordt verkregen door in de vergelijking $y = f(x)$ de onafhankelijke variabele x op te lossen in functie van de afhankelijke variabele y. Hierbij kan het echter voorkomen dat x meer dan één oplossing heeft. De inverse functie f^{-1} bestaat dan niet, en de functie f heet dan *niet-inverteerbaar*.

Wanneer bestaat f^{-1} dan wél? De inverteerbaarheid van een functie hangt nauw samen met een eigenschap *injectiviteit* genaamd. Per definitie heet een functie f *injectief* als en slechts als elke twee verschillende x-waarden uit het domein van f twee verschillende beelden opleveren. In symbolen:

$$\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = f(x) \text{ is injectief} \\ \Updownarrow \\ \forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, f : \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{array}$$

Of nog,

$$\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = f(x) \text{ is injectief} \\ \Updownarrow \\ \forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, f : \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array}$$

De injectiviteit is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde tot het bestaan van de inverse functie. In het algemeen geldt:

$$f^{-1} \text{ bestaat} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ injectief}$$

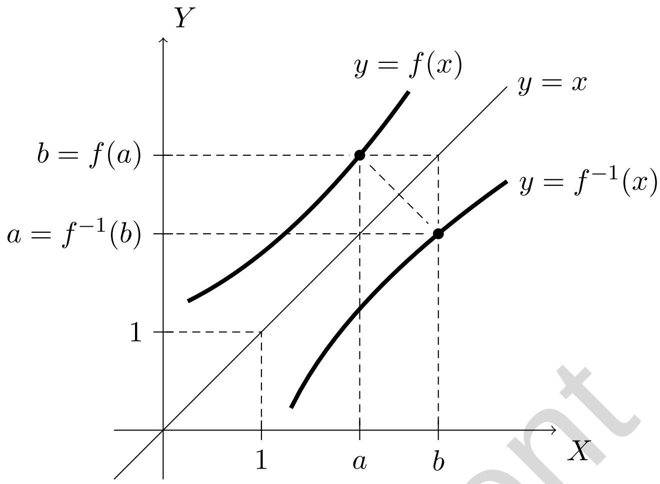
Voorbeelden

- De inverse functie van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = 2x + 3$ is de functie $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto x = \dfrac{y-3}{2}$.
- De functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ heeft als inverse functie $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto x = \sqrt[3]{y}$
- De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ is niet inverteerbaar aangezien zij niet-injectief[2] is. De functie f is wel te aanzien als vereniging van twee injectieve functies $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto y = x^2$ en $f_2 : R^- \to \mathbb{R} : x \mapsto y = x^2$, die elk een inverse hebben:
  $f_1^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : y \to x = \sqrt{y}$ en $f_2^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^- : y \to x = -\sqrt{y}$.
- Voor de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ geldt dat $f^{-1} = f$.

[2]Er bestaan immers verschillende x-waarden met een zelfde beeld. Bijvoorbeeld, $f(-1) = f(1)$.

Opmerking

De grafiek van f^{-1} is het spiegelbeeld t.o.v. de eerste bissectrice van de grafiek van f. Inderdaad, als (a, b) op de grafiek van f ligt, dan $b = f(a)$. Maar dan geldt $a = f^{-1}(b)$, zodat (b, a) een grafiekpunt van f^{-1} is.



1.6 Algebraïsche functies

Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$, bepaald door een enkelvoudig voorschrift en geconstrueerd vanaf x met behulp van optelling, vermenigvuldiging, deling, machtsverheffing en/of worteltrekking, noemt men een *algebraïsche functie*.

We bekijken de verschillende soorten algebraïsche functies van naderbij.

1.6.1 Veeltermfunctie

Een *veeltermfunctie van de n-de graad* is een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ met als voorschrift

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

waarbij $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}_0$ en $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Constante functie

Een *constante functie* is een veeltermfunctie van de nulde graad:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a \quad \text{met } a \in \mathbb{R}$$

Als $a \neq 0$, dan heeft zo'n functie geen nulpunt. Indien $a = 0$, dan is elk reëel getal een nulpunt van deze functie.

Lineaire functie

Een *lineaire functie* is een veeltermfunctie van de eerste graad:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b \quad \text{met } a \in \mathbb{R}_0 \text{ en } b \in \mathbb{R}$$

De grafiek van zo'n functie is een rechte die de X-as snijdt in het punt $(-\frac{b}{a}, 0)$ en de Y-as in het punt $(0, b)$. Het getal $-\frac{b}{a}$ is het enige nulpunt van deze functie.

Kwadratische functie

Een *kwadratische functie* is een veeltermfunctie van de tweede graad:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad \text{met } a \in \mathbb{R}_0 \text{ en } b, c \in \mathbb{R}$$

De uitdrukking ax^2+bx+c noemen we hierbij de *standaardgedaante* van de kwadratische functie.

Het is altijd mogelijk de standaardgedaante te herschrijven in de vorm $\alpha(x-\beta)^2+\gamma$, waarbij $\alpha = a$, $\beta = -\frac{b}{2a}$ en $\gamma = -\frac{D}{4a}$ met $D = b^2 - 4ac$ (de discriminant van de kwadratische veelterm $ax^2 + bx + c$). Inderdaad, omdat

$$\alpha(x-\beta)^2 + \gamma = \alpha(x^2 - 2\beta x + \beta^2) + \gamma = \alpha x^2 - 2\alpha\beta x + \alpha\beta^2 + \gamma,$$

hebben we

$$\begin{aligned} &\alpha(x-\beta)^2 + \gamma = ax^2 + bx + c \\ \Leftrightarrow\quad &\left\{\begin{aligned} \alpha &= a \\ -2\alpha\beta &= b \\ \alpha\beta^2 + \gamma &= c \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = a \\ \beta = -\frac{b}{2\alpha} = -\frac{b}{2a} \\ \gamma = c - \alpha\beta^2 = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{-D}{4a} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Als $a = 1$ en $b = c = 0$, dan vinden we de functie $y = x^2$ terug. De grafiek hiervan is een dalparabool met top $(0, 0)$ en de Y-as als symmetrieas. Deze grafiek heten we *basisparabool.*

Voor andere waardencombinaties van a, b en c kunnen we gebruik maken van de gedaante $\alpha(x-\beta)^2 + \gamma$ van de kwadratische functie. Hieruit valt namelijk snel af te leiden dat de grafiek ervan een transformatie is van de basisparabool, met een nieuwe paraboolvorm tot gevolg waarbij de top verplaatst is naar het punt (β, γ) en de symmetrieas naar de rechte $x = \beta$. Afhankelijk van het teken van a hebben we een dal- of bergparabool.
Samengevat,

Tabel 1.1: Kenmerken van de grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$

a	aard	top	symm. as	D	nulpunten	snijpt. met Y-as
> 0	dalparab.			> 0	$\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ en $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$	
		$(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$	$x = -\frac{b}{2a}$	$= 0$	$\frac{-b}{2a}$	$(0, c)$
< 0	bergparab.			< 0	geen nulpunten	

1.6.2 Rationale functie

Een functie f, gedefinieerd als

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)},$$

waarbij u en v veeltermfuncties zijn en v geen constante functie is, noemt men een *rationale functie.*

Het domein van een rationale functie bestaat uit alle reële getallen uitgezonderd de nulpunten van de noemer:

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,|\, v(x) = 0\}$$

<u>Voorbeeld</u>

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{a}{x} \quad \text{met } a \in \mathbb{R}_0$$

Deze functie heeft domein $\mathbb{R}_0$ en beeld $\mathbb{R}_0$. De grafiek is een hyperbool met de X-as en Y-as als asymptoten.

1.6.3 Irrationale functie

Een algebraïsche functie waarbij in het voorschrift wortelvormen optreden, noemt men een *irrationale functie.*

Het domein van een irrationale functie wordt bepaald door te eisen dat

- elke uitdrukking die onder een evenmachtswortel voorkomt positief is
- de nulpunten van eventueel aanwezige noemers uitgesloten worden.

<u>Voorbeelden</u>

- $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ heeft als domein $]-\infty, -2\,[\, \cup \,[\,1, +\infty\,[$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$ heeft als domein $[\,1, +\infty\,[$
- $f(x) = \frac{x+\sqrt{2-x}}{x^2-x-6}$ heeft als domein $]-\infty, -2\,[\, \cup \,]-2, 2\,]$
- $f(x) = \frac{x+\sqrt[3]{2-x}}{x^2-x-6}$ heeft als domein $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

1.7 Exponentiële en logaritmische functies

1.7.1 Exponentiële functie

Definitie

Voor $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ noemt men de functie

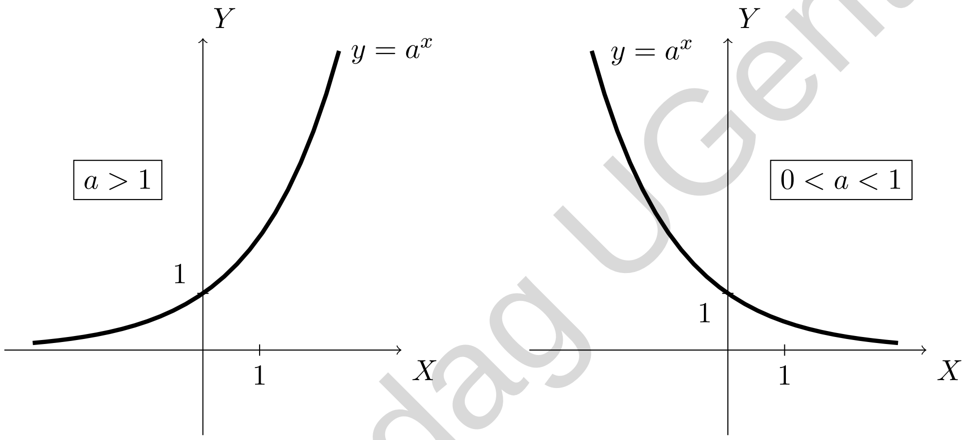
$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

de *exponentiële functie met grondtal a.*

Uit de deze definitie volgt rechtstreeks:

$$\operatorname{dom} \exp_a = \mathbb{R}, \quad \operatorname{bld} \exp_a = \mathbb{R}_0^+ \quad \text{en} \quad \exp_a(0) = 1.$$

Grafieken



Merk op dat $\exp_a$ een injectie is, aangezien elke horizontale rechte de grafiek van $\exp_a$ hoogstens éénmaal snijdt.

We vermelden de volgende eigenschappen van exponentiële functies:

Eigenschappen

Voor alle $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $x, y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gelden:

$$a^{y_1+y_2} = a^{y_1} \cdot a^{y_2}$$

$$a^{y_1-y_2} = \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}}$$

$$a^{xy} = (a^y)^x = (a^x)^y$$

Een belangrijke exponentiële functie is deze met grondtal e, waarbij men het getal e de *constante van Euler* noemt en als volgt definieert:

$$e = \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t.$$

Men kan aantonen dat deze limiet e een irrationaal getal is en dat $e \approx 2{,}7182$.

1.7.2 Logaritmische functie

Aangezien $\exp_a$ ($a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$) een injectie is, is deze functie dus inverteerbaar. De inverse functie van $\exp_a$ is dan de functie die met iedere $x \in \mathbb{R}_0^+$ een eenduidig getal y associeert zodat $x = \exp_a(y) = a^y$.

Definitie

Voor $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ wordt de inverse functie van $\exp_a$ de *logaritmische functie met grondtal a* genoemd en genoteerd als $\log_a$:

$$\log_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y \text{ met } a^y = x$$

Hieruit volgt dus

$$\boxed{y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x}$$

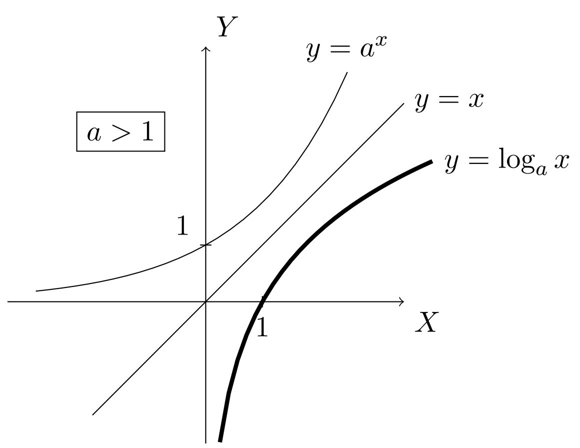
Uit de definitie van $\log_a$ als inverse functie van $\exp_a$ volgt onmiddellijk:

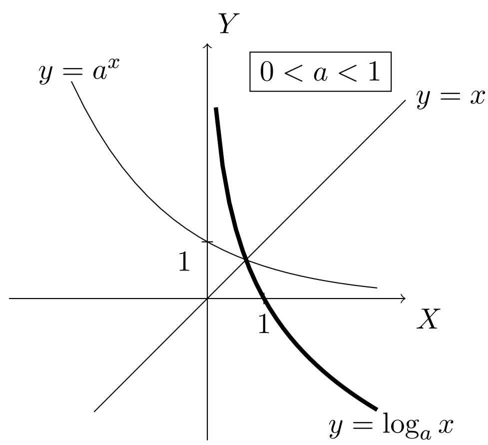
$$\operatorname{dom} \log_a = \mathbb{R}_0^+ = \operatorname{bld} \exp_a, \quad \operatorname{bld} \log_a = \mathbb{R} = \operatorname{dom} \exp_a, \quad \log_a 1 = 0 \quad \text{en} \quad \log_a a = 1$$

en ook

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : a^{\log_a x} = x \quad \text{en} \quad \forall x \in \mathbb{R} : \log_a a^x = x$$

Grafieken De grafiek van $\log_a$ wordt bekomen als spiegelbeeld t.o.v. de eerste bissectrice van de grafiek van $\exp_a$:





Uit de eigenschappen van machten en exponentiële functies kan men de volgende eigenschappen van logaritmen afleiden:

Eigenschappen

Voor alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ en $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ gelden:

1) $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

   Bewijs. Vermits $a^{\log_a x_1 + \log_a x_2} = a^{\log_a x_1} \cdot a^{\log_a x_2} = x_1 x_2$, volgt het te bewijzen uit de definitie van $\log_a$. $\square$

2) $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

   Bewijs. Vermits $a^{\log_a x_1 - \log_a x_2} = \dfrac{a^{\log_a x_1}}{a^{\log_a x_2}} = \dfrac{x_1}{x_2}$, volgt het te bewijzen uit de definitie van $\log_a$. $\square$

3) $\log_a(b^x) = x \cdot \log_a b$

   Bewijs. Vermits $a^{x \cdot \log_a b} = a^{(\log_a b)x} = \left(a^{\log_a b}\right)^x = b^x$, volgt het te bewijzen uit de definitie van $\log_a$. $\square$

Twee belangrijke logaritmische functies zijn deze met grondtal e, *natuurlijke of Neperiaanse logaritme* genoemd en als volgt genoteerd:

$$\ln = \log_e$$

en deze met grondtal 10, *tiendelige of Briggse logaritme* genoemd en genoteerd als:

$$\log = \log_{10}$$

De overgang tussen logaritmenstelsels wordt gegeven door de volgende stelling:

Stelling

Voor willekeurige $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ en $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Bewijs. Stel $\alpha = \log_a x$ en $\beta = \log_b x$, dan volgt uit de definitie van logaritmische functie dat $a^\alpha = x = b^\beta$ en dus

$$\beta = \log_b x = \log_b a^\alpha \overset{\text{(eig. 3 hierboven)}}{=} \alpha \log_b a.$$

Bijgevolg $\alpha = \dfrac{\beta}{\log_b a}$. $\square$

Gevolg

Voor alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ en $x \in \mathbb{R}_0^+$ gelden:

1) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Bewijs. Stel $x = b$ in de stelling hierboven. $\square$

2) $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Bewijs. Stel $a = 10$ en $b = e$ in de stelling hierboven. $\square$

3) $\ln x = \dfrac{\log x}{\log e}$

Bewijs. Stel $a = e$ en $b = 10$ in de stelling hierboven. $\square$

1.8 Goniometrische functies

Voor algemene informatie over de goniometrische getallen sinus, cosinus en tangens verwijzen we naar bijlage C.

1.8.1 Cosinus- en sinusfunctie

De goniometrisch getallen "cosinus" en "sinus" bepalen op natuurlijke wijze de volgende functies:

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos x \quad (\text{de } \textit{cosinusfunctie})$$

en

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x \quad (\text{de } \textit{sinusfunctie})$$

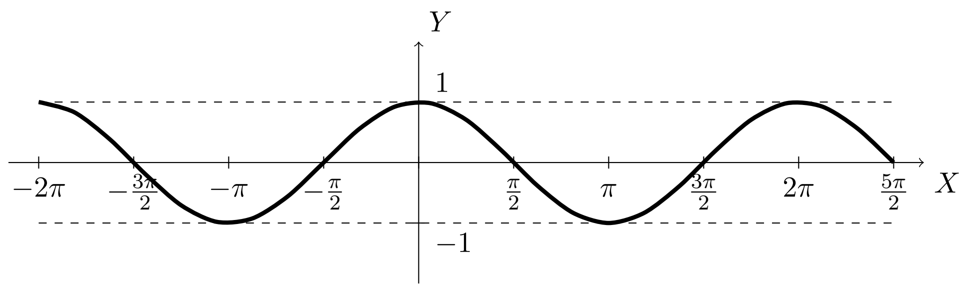
Uit de definities van cosinus en sinus (zie bijlage C) volgt onmiddellijk dat

$$\operatorname{dom} \cos = \mathbb{R} \quad \text{en} \quad \operatorname{bld} \cos = [-1, 1\,]$$

en

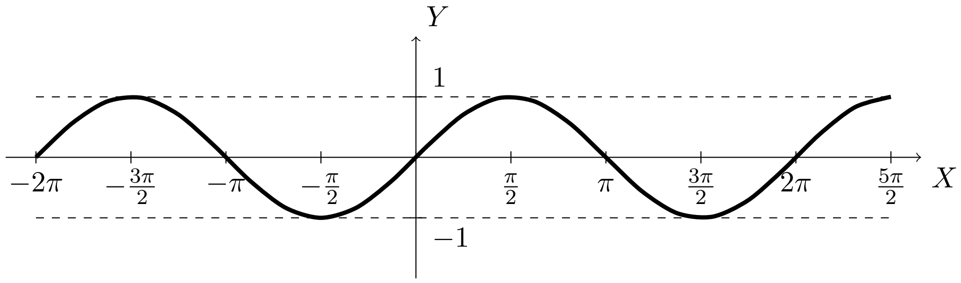
$$\operatorname{dom} \sin = \mathbb{R} \quad \text{en} \quad \operatorname{bld} \sin = [-1, 1\,].$$

Grafiek van de cosinusfunctie



De cosinusfunctie is een even periodieke functie met primitieve periode 2π.

Grafiek van de sinusfunctie



De sinusfunctie is een oneven periodieke functie met primitieve periode 2π.

Opmerking

Aangezien voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

(zie bijlage C: formules voor complementaire en tegengestelde hoeken), is de grafiek van de sinusfunctie te bekomen uit de grafiek van de cosinusfunctie door deze laatste met $\frac{\pi}{2}$ eenheden in de richting van de positieve X-as te verschuiven.

1.8.2 Tangens- en cotangensfunctie

Net zoals de cosinus en sinus bepalen de goniometrische getallen “tangens” en “cotangens” op natuurlijke wijze de volgende twee functies:

$$\tan : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \tan x \quad \text{(de } \textit{tangensfunctie}\text{)}$$

en

$$\cot : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cot x \quad \text{(de } \textit{cotangensfunctie}\text{)}$$

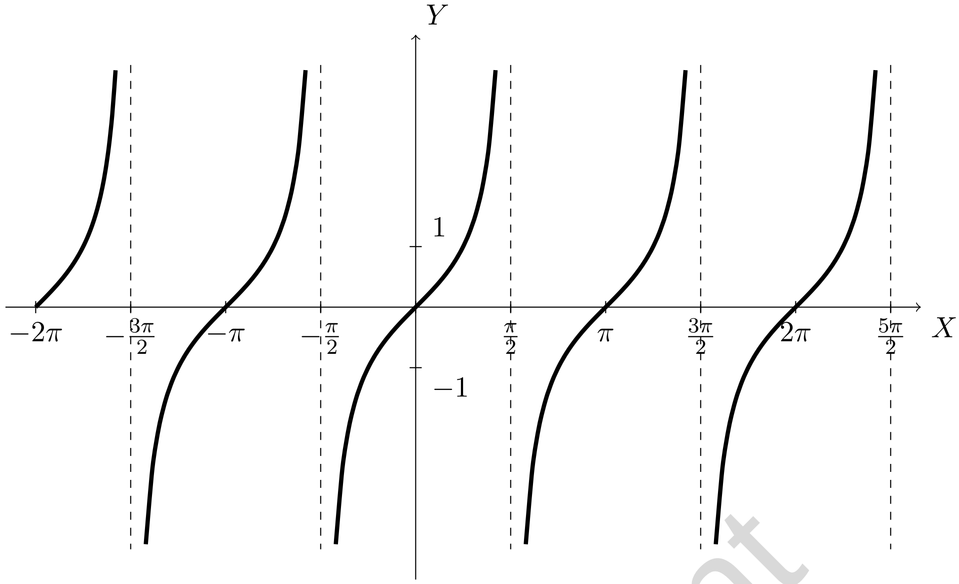
Uit de definities van tangens en cotangens (zie bijlage C) haalt men onmiddellijk dat

$$\operatorname{dom} \tan = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{en} \quad \operatorname{bld} \tan = \mathbb{R}$$

en

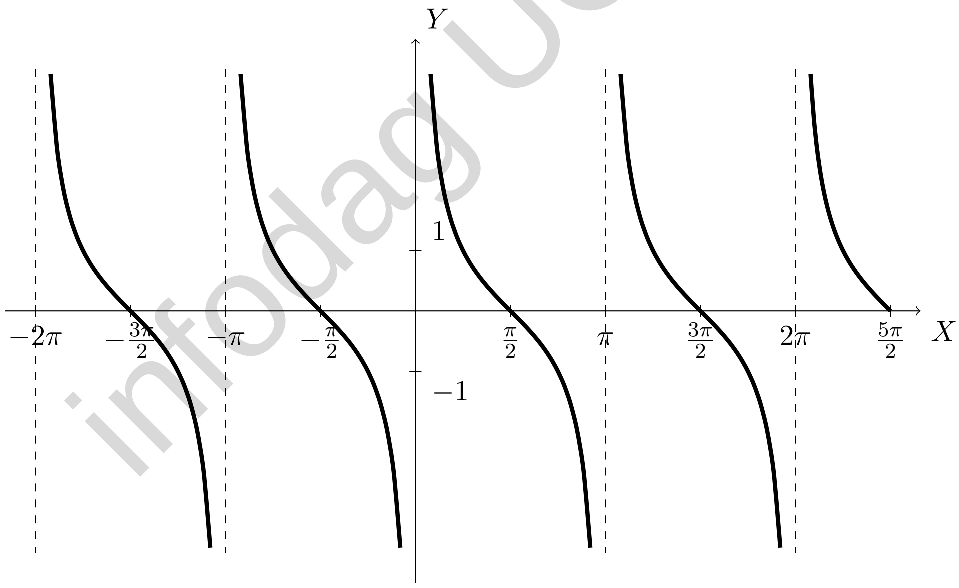
$$\operatorname{dom} \cot = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{en} \quad \operatorname{bld} \cot = \mathbb{R}.$$

Grafiek van de tangensfunctie



De tangensfunctie is een oneven periodieke functie met primitieve periode π.

Grafiek van de cotangensfunctie



De cotangensfunctie is een oneven periodieke functie met primitieve periode π.

Opmerking

Aangezien

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

(zie bijlage C: formules voor complementaire en tegengestelde hoeken), is de grafiek van de cotangensfunctie te bekomen uit de grafiek van de tangensfunctie door deze laatste met $\frac{\pi}{2}$ eenheden in de richting van de positieve X-as te verschuiven en daarna te spiegelen t.o.v. de X-as.

1.9 Cyclometrische functies

De cosinus-, sinus, tangens- en cotangensfuncties zijn allen niet-injectief. Inderdaad, meerdere hoeken kunnen gelijke cosinus-, respectievelijk sinus-, tangens- en cotangenswaarden hebben[3]. De inverse functies $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$ en $\cot^{-1}$ bestaan dus niet.

Wanneer men de vernoemde functies tot een goed gekozen interval beperkt, dan verkrijgt men wél injectieve functies. Bijvoorbeeld, de beperking van de cosinusfunctie tot het interval $[\,0, \pi]$ levert de injectieve functie

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1] : x \mapsto \cos x$$

op, die inverteerbaar is. We noemen de inverse functie van $\cos|_{[0,\pi]}$ de *boogcosinusfunctie* en noteren hiervoor "Bgcos":

$$\text{Bgcos} : [-1, 1\,] \to [\,0, \pi] : x \mapsto y \quad \text{met } \cos y = x$$

Door verder de sinus-, tangens- en cotangensfunctie op een gepaste manier te beperken, kan men op analoge manier de *boogsinus-*, *boogtangens-* en *boogcotangensfunctie* definiëren:

$$\text{Bgsin} = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$$

$$\text{Bgtan} = \left(\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}$$

$$\text{Bgcot} = \left(\cot|_{]0,\pi[}\right)^{-1}$$

of, uitgedrukt met hun voorschrift,

$$\text{Bgsin} : [-1, 1\,] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] : x \mapsto y \quad \text{met } \sin y = x$$

$$\text{Bgtan} : \mathbb{R} \to \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[: x \mapsto y \quad \text{met } \tan y = x$$

$$\text{Bgcot} : \mathbb{R} \to \left]0, \pi\right[: x \mapsto y \quad \text{met } \cot y = x$$

<u>Voorbeelden</u>

$$\begin{array}{llll} \text{Bgsin}\, 0 = 0 & \text{Bgcos}\, 1 = 0 & \text{Bgtan}\, 0 = 0 & \text{Bgcot}\, 1 = \frac{\pi}{4} \\ \text{Bgsin}(-1) = -\frac{\pi}{2} & \text{Bgcos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} & \text{Bgtan}\,(-1) = -\frac{\pi}{4} & \text{Bgcot}\,(-1) = \frac{3\pi}{4} \end{array}$$

[3] Dit volgt uit de formules voor gelijke hoeken, zie bijlage C

1.10 Toepassingen in de economie

Toepassing 1

De vraagkromme van een bepaald product in een markt met volledige concurrentie wordt gegeven door de vergelijking $q = q_{\rm V}(p)$, waarbij p de prijs en q de gevraagde hoeveelheid van het product voorstellen en waarbij de functie $q_{\rm V}$ het volgende voorschrift heeft:

$$q_{\rm V}(p) = 120 - 2p.$$

De aanbodskromme van datzelfde product wordt gegeven door de vergelijking $q = q_{\rm A}(p)$, waarbij q hier de aangeboden hoeveelheid van het product voorstelt en

$$q_{\rm A}(p) = 4p - 60.$$

We zoeken de evenwichtsprijs, nl. de prijs waartegen vraag en aanbod van het product gelijk zijn. Hiervoor moet de vergelijking

$$q_{\rm A}(p) = q_{\rm V}(p)$$

opgelost worden naar p:

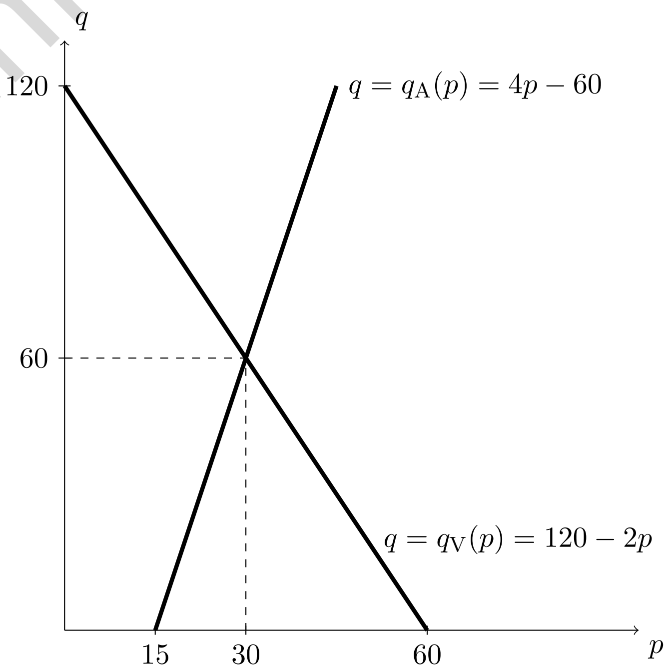
$$120 - 2p = 4p - 60 \quad \Leftrightarrow \quad 120 + 60 = 4p + 2p \quad \Leftrightarrow \quad 180 = 6p \quad \Leftrightarrow \quad p = 30.$$

Bijgevolg,

$$q_{\rm V}(30) = 120 - 2 \times 30 = 60 \quad \text{en} \quad q_{\rm A}(30) = 4 \times 30 - 60 = 60,$$

en we hebben dus degelijk $q_{\rm V}(p) = q_{\rm A}(p)$ voor $p = 30$. Het marktevenwicht is dus bepaald door de prijs $p = 30$ en een even grote aangeboden als gevraagde hoeveelheid $q = 60$ van het product.

Grafisch gezien treedt het koppel $(p, q) = (30, 60)$ op als snijpunt van de grafieken van de vraagfunctie $q_{\rm V}(p)$ en aanbodsfunctie $q_{\rm A}(p)$:



Toepassing 2

De vaste kosten bij de productie van een goed bedragen € 800 en de variabele kosten per geproduceerde eenheid bedragen € 10. Indien de verkoopprijs € 20 per eenheid bedraagt, hoeveel eenheden dienen er dan verkocht te worden opdat de opbrengst gelijk zou zijn aan de totale kosten? Anders gesteld, vanaf welke omzet begint de producent winst te boeken?

We bepalen eerst de totale kostenfunctie K:

$$K(q) = 800 + 10q,$$

waarbij q de gevraagde hoeveelheid aangeeft. De opbrengstfunctie O wordt gegeven door:

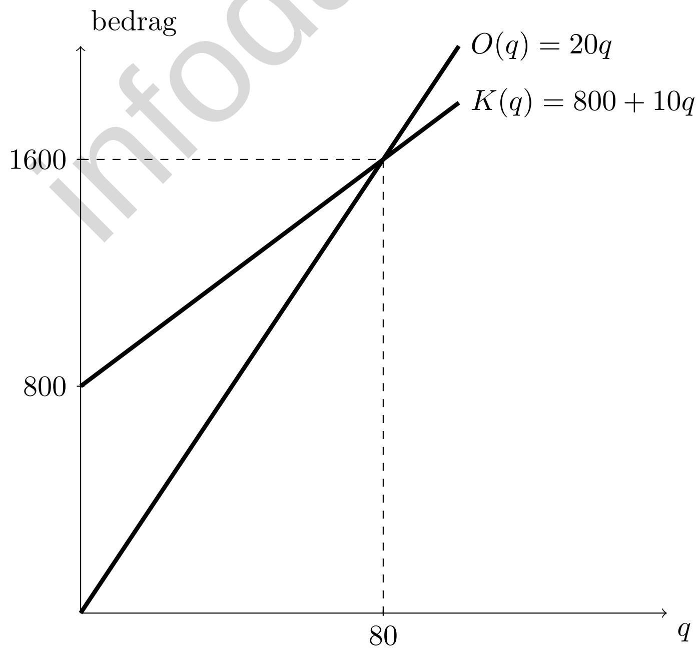
$$O(q) = 20q.$$

Vervolgens lossen we de vergelijking $K(q) = O(q)$ op naar q:

$$800 + 10q = 20q \quad \Leftrightarrow \quad q = 80.$$

Hierbij geldt $K(80) = O(80) = 1600$.

Grafisch:



Het snijpunt $(80, 1600)$ van de grafieken van K en O heet het *break-even* punt. Uit de grafiek is duidelijk af te leiden dat, voor $q \geq 80$, de opbrengst $O(q)$ groter is dan de totale kosten $K(q)$ en dus de winst $W(q) = O(q) - K(q)$ positief is.

Toepassing 3

De vraagkromme van een monopolist wordt gegeven door

$$q = q_V(p) = 410 - 5p,$$

en de totale kostenfunctie K door

$$K(q) = q^2 + 10q + 330.$$

Bij welke omzet q bereikt de monopolist een break-even punt? En maximale winst?

We bepalen eerst de opbrengst O als functie van de omzet. Uit de vraagvergelijking $q = 410 - 5p$ volgt $p = 82 - \frac{1}{5}\,q$, zodat

$$O(q) = p\,q = \left(82 - \tfrac{1}{5}\,q\right) q = 82q - \tfrac{1}{5}\,q^2.$$

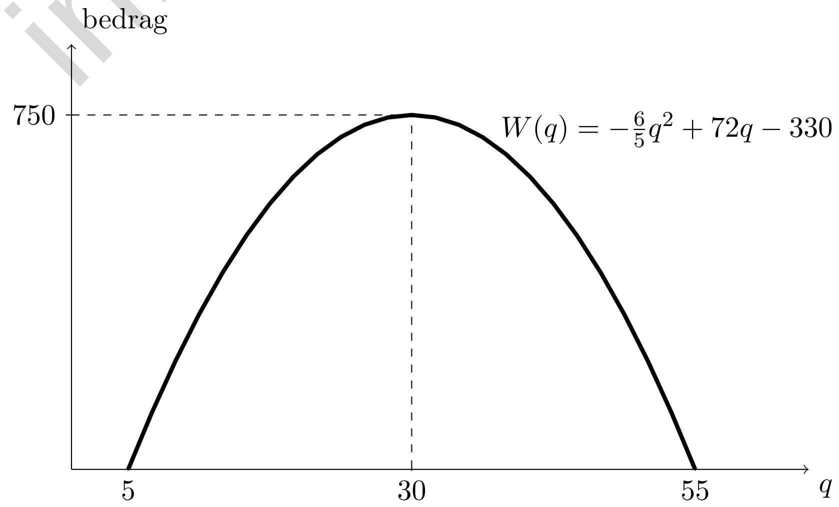
Bijgevolg is de winst W als functie van de afzet q gegeven door

$$\begin{aligned} W(q) &= O(q) - K(q) \\ &= \left(82q - \tfrac{1}{5}\,q^2\right) - (q^2 + 10q + 330) \\ &= -\tfrac{6}{5}\,q^2 + 72q - 330. \end{aligned}$$

Bij een break-even afzet $q^\star$ is de winst gelijk aan nul. We vinden

$$W(q^\star) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q^\star = 5 \quad \text{of} \quad q^\star = 55.$$

Grafisch vinden we de break-even afzet terug bij de snijpunten van de grafiek van de winstfunctie met de q-as:



Aangezien verder de grafiek van W een bergparabool is (de coëff. van q^2 is negatief), zal de maximale winst optreden bij de top. Deze top is gegeven door $(30, 750)$. M.a.w. bij een afzet van $q = 30$ wordt de winst maximaal en gelijk aan 750.

Toepassing 4: Effect van een belasting op vraag en aanbod

In deze toepassing zullen we werken met de inverse vraag- en aanbodsfuncties, zoals in de cursussen economie. Het voordeel hiervan is dat het effect op het marktevenwicht van een belasting gemakkelijker te duiden is.

Laat de (inverse) vraag- en aanbodfuncties van een goed gegeven zijn door

$$\begin{aligned} p &= V(q) = 120 - 4q \\ p &= A(q) = 29 + \tfrac{1}{3}\, q \end{aligned} \tag{1.1}$$

Om het marktevenwicht (q_0, p_0) te vinden, dienen we het bovenstaand stelsel vergelijkingen op te lossen. We doen dit eerst via oplossen van $V(q_0) = A(q_0)$ naar q_0,

$$120 - 4q_0 = 29 + \tfrac{1}{3}\, q_0 \quad \Leftrightarrow \quad 120 - 29 = 4q_0 + \tfrac{1}{3}\, q_0 \quad \Leftrightarrow \quad 91 = \tfrac{13}{3}\, q_0 \quad \Leftrightarrow \quad q_0 = 21,$$

waarna $p_0 = V(q_0) = 120 - 84 = 36$.

Onderstel nu dat de overheid per verkochte eenheid van het goed een belasting van τ geldeenheden oplegt aan de producent. Van elke prijs p die de consument betaalt voor het goed, zal de producent slechts $p - \tau$ ontvangen; het bedrag τ gaat naar de overheid. De producent zal hierop reageren met een aangepast aanbodschema, waarbij q aantallen eenheden van het goed niet langer aan een eenheidsprijs van $A(q)$ worden aangeboden, maar aan een eenheidsprijs van $A(q) + \tau$. De producent wil namelijk graag zijn oorspronkelijke omzet behouden. M.a.w., de producent hanteert nu een nieuwe aanbodfunctie

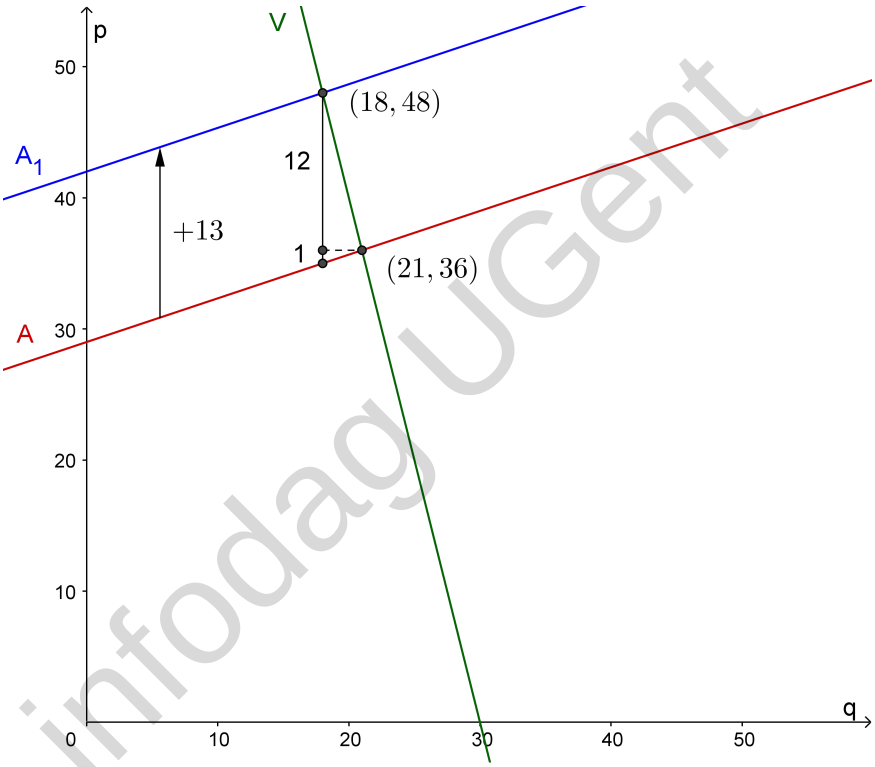
$$p = A_1(q) = A(q) + \tau = 29 + \tau + \tfrac{1}{3}\, q \tag{1.2}$$

De grafiek van A_1 verschuift dus met τ eenheden naar boven, zie figuur 1.1.

Onderstel $\tau = 13$. Het nieuwe marktevenwicht (q_1, p_1) vinden we nu door het stelsel met de vergelijkingen $p = V(q)$ en $p = A_1(q) = 42 + \frac{1}{3}\, q$ op te lossen. Bereken nu zelf dat $q_1 = 18$ en $p_1 = 48$.

De totale belastingopbrengst voor de overheid bij dit nieuwe marktevenwicht is $q_1\tau = 234$ geldeenheden. Bemerk dat dit *minder* is dan $q_0\tau$, het belastingbedrag maal de oorspronkelijke evenwichtshoeveelheid q_0: men durft al eens te vergeten dat bij een belastinginvoering de gevraagde hoeveelheid *daalt* door toename van de prijs.

Samengevat, door de taxmaatregel verplaatst het marktevenwicht zich van $(q_0, p_0) = (21, 36)$ naar $(q_1, p_1) = (18, 48)$. Zowel de consument als de producent dragen een deel van de last van de belasting: voor de consument verhoogt de prijs met 12 geldeenheden (van p_0 tot p_1), terwijl de producentenprijs daalt met 1 geldeenheid (van $p_0 = 36$ naar $p_1 - \tau = 35$). Merk op: $12 + 1 = \tau$.



Figuur 1.1: Effect van belasting op marktevenwicht