# Hoofdstuk 3

# Toevallige veranderlijken

## en hun verdelingen

Hand-outs van de theorielessen *Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek* 2019–2020

Prof. dr. ir. Gert de Cooman, Foundations Lab, Universiteit Gent



## 1 Wat is een (reële) toevallige veranderlijke?

### Tot nu toe: algemeen

3.2 Wat is een (reële) toevallige veranderlijke? [DG:3.1]

**Een toevallige veranderlijke**
is een veranderlijke waarvan we de waarde niet (goed) kennen.

**Opmerking:**
Wanneer we kijken naar ons experiment, dan is de uitkomst $S$ een toevallige veranderlijke in de steekproefruimte $\mathscr{S}$.

Zij

$$\phi\colon \mathscr{S} \to \mathscr{X} : s \mapsto \phi(s)$$

Dan is $X = \phi(S)$ een toevallige veranderlijke in $\mathscr{X}$. Een toevallige veranderlijke $X$ wordt daarom vaak gezien als een functie van een steekproefruimte naar een andere verzameling $\mathscr{X}$.

### Meer specifieke definitie: reële toevallige veranderlijke

3.3 Wat is een (reële) toevallige veranderlijke? [DG:3.1]

**Definitie: (Reële) toevallige veranderlijke [Eng. (real) random variable]**
Een (reële) toevallige veranderlijke $X$ is een reële veranderlijke waarvan we de waarde niet goed kennen:

- de waardenverzameling $\mathscr{X}$ is een deel van $\mathbb{R}$
- een mogelijke of werkelijke waarde stellen we voor door $x$

**Belangrijke opmerking:**
Een reële toevallige veranderlijke $X$ wordt vaak gezien als een functie van een steekproefruimte naar (een deel $\mathscr{X}$ van) $\mathbb{R}$:

$$X\colon \mathscr{S} \to \mathbb{R}$$

### Voorbeeld: toevallige veranderlijke in $\mathbb{R}^2$

3.4 Wat is een (reële) toevallige veranderlijke? [DG:3.1]

**Experiment:**
Ik selecteer op toevallige wijze iemand van jullie:

$\mathscr{S} =$ de verzameling van jullie allemaal
$S =$ degene die ik zal selecteren

Beschouw de volgende afbeeldingen van $\mathscr{S}$ naar $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} L(s) &= \text{lengte van persoon } s \\ M(s) &= \text{massa van persoon } s \end{aligned}$$

Dan is

- de lengte $L = L(S)$ van de geselecteerde student een toevallige veranderlijke in $\mathbb{R}$
- de massa $M = M(S)$ van de geselecteerde student een toevallige veranderlijke in $\mathbb{R}$
- het koppel $(L,M) = (L(S),M(S))$ een toevallige veranderlijke in $\mathbb{R}^2$

### Voorbeeld: indicatoren van gebeurtenissen

3.5 Wat is een (reële) toevallige veranderlijke?

Beschouw een gebeurtenis $A \subseteq \mathscr{S}$. Dan is de functie

$$I_A : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$$

met

$$I_A(s) = \begin{cases} 1 & s \in A \\ 0 & s \notin A \end{cases}$$

de indicator(functie) van $A$.

De indicator $I_A$ neemt de waarde 1 aan als $A$ optreedt, en de waarde 0 als $A$ niet optreedt.

$I_A$ is een reële toevallige veranderlijke met mogelijkhedenverzameling $\{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$.

## 2 De verdeling van een toevallige veranderlijke

### Definitie

3.6 De verdeling van een toevallige veranderlijke

De reële toevallige veranderlijke $X$ neemt waarden aan in (een deel van) $\mathbb{R}$.
Voor elke gebeurtenis $A \subseteq \mathbb{R}$ is er een getal:

$$\begin{aligned} P_X(A) &= \text{ de waarschijnlijkheid dat } X \in A \\ &= P(X \in A) \qquad [\text{symbolisch}] \\ &= P(\{s \in \mathscr{S} : X(s) \in A\}) \qquad [X \text{ als functie}] \end{aligned}$$

**Definitie: (Waarschijnlijkheids)verdeling [Eng. (probability) distribution]**
De waarschijnlijkheidsmaat $P_X$ wordt de (waarschijnlijkheids)verdeling of de distributie van de toevallige veranderlijke $X$ genoemd.

**Opmerking:**
Wanneer duidelijk is over welke $X$ het gaat, laten we soms de index $_X$ weg in $P_X$.

## 3 Distributiefuncties

Om de distributie $P_X$ van een reële toevallige veranderlijke vast te leggen, moeten we $P_X(A)$ vastleggen voor 'elke' deelverzameling $A$ van $\mathbb{R}$, dus moeten we zoveel reële getallen kennen als er delen van $\mathbb{R}$ zijn: $2^{|\mathbb{R}|}$. Door de somwet kan er echter vaak een verband tussen die getallen worden gelegd, wat het aantal vast te leggen getallen veel kleiner maakt. Er zijn dus economischer manieren om een verdeling $P_X$ te kenmerken (haar waarden vast te leggen). In wat volgt, bestuderen we enkele van de meest voorkomende manieren om dat te doen.

## Definitie

3.7 Distributiefuncties [DG:3.3]

**Definitie: (Cumulatieve) distributiefunctie [Eng. (cumulative) distribution function, cdf]**
Beschouw een reële toevallige veranderlijke $X$ met verdeling $P_X$. Dan wordt de reële functie $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

de (cumulatieve) distributiefunctie (ook: cdf) van $X$ genoemd.

**Opmerking:**
Wanneer duidelijk is over welke $X$ het gaat, laten we soms de index $_X$ weg in $F_X$.

**Opmerking: $F_X$ bepaalt $P_X$ en omgekeerd**
Wanneer de $F_X$ kennen, kunnen we ook $P_X(A)$ bepalen voor alle 'interessante' gebeurtenissen $A \subseteq \mathbb{R}$. [Zonder bewijs]

Dit betekent dat een distributie $P_X$ volledig gekend is wanneer we de distributiefunctie $F_X$ kennen (en natuurlijk ook omgekeerd).

We zien dus dat om de distributie $P_X$ van een reële toevallige veranderlijke vast te leggen, we enkel haar distributiefunctie $F_X$ hoeven vast te leggen, wat neerkomt op het vastleggen van zoveel reële getallen als er elementen van $\mathbb{R}$ zijn: $|\mathbb{R}|$. Verderop, aan het eind van dit hoofdstuk, vertel ik iets meer — en dat is geen examenstof — over de beroemde stelling van Cantor (1892), die aangeeft dat een verzameling altijd strict minder elementen heeft dan deelverzamelingen.

## Eigenschappen van distributiefuncties

3.8 Distributiefuncties [DG:3.3]

**Stelling 3.1**
Zij $F$ de distributiefunctie van een reële toevallige veranderlijke $X$. Dan geldt:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. Als $x_1 \leq x_2$ dan $F(x_1) \leq F(x_2)$. [$F$ is niet-dalend]
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ en $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. [randwaarden]
4. $F(a) = F(a^+) := \lim_{x \to a, x > a} F(x)$. [$F$ is rechtscontinu]

3.9 Distributiefuncties [DG:3.3]

*Bewijs.*

1. Onmiddellijk uit stelling 1.5.
2. Onmiddellijk uit

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow (-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2] \Rightarrow P_X((-\infty, x_1]) \leq P_X((-\infty, x_2])$$

   omdat de waarschijnlijkheidsmaat $P_X$ niet-dalend is (stelling 1.4).
3. Geen examenstof: Beschouw de niet-stijgende rij gebeurtenissen $A_n = (-\infty, -n)$ en merk op dat $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Dan meteen

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{n \to \infty} F(-n) = \lim_{n \to \infty} P_X(A_n) = P_X\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P_X(\emptyset) = 0$$

   Hierbij maakten we gebruik van het lemma 3.1, en stelling 1.2. Het bewijs voor de andere gelijkheid verloopt analoog.
4. Geen examenstof: Beschouw de niet-stijgende rij gebeurtenissen $A_n = (-\infty, a + 1/n]$ en bemerk dat $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty, a]$. Gebruik nu het lemma 3.1. □

## Aanvullend lemma (ter informatie, geen examenstof)



**Lemma 3.1**
Zij $P$ een waarschijnlijkheidsmaat. Dan geldt:

1. Voor een niet-dalende rij gebeurtenissen $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ geldt dat
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$
2. Voor een niet-stijgende rij gebeurtenissen $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ geldt dat
$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$



*Bewijs.* 1. Beschouw de rij gebeurtenissen
$$D_1 = A_1 \quad D_2 = A_2 \setminus A_1 \quad \ldots \quad D_n = A_n \setminus A_{n-1} \quad \ldots$$
Dan zijn de $D_n$ onderling disjunct, en $A_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n = \bigcup_{n=1}^{k} D_n$. En dus geldt dat
$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(D_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} P(D_n) = \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{k} D_n\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} P(A_k) \end{aligned}$$

2. Onmiddellijk uit 1, de wetten van de Morgan, en stelling 1.3. □

## Eigenschappen van distributiefuncties



**Stelling 3.2**
Zij $F$ de distributiefunctie van een reële toevallige veranderlijke $X$. Dan geldt:

1. $P_X((x,+\infty)) = P(X > x) = 1 - F(x)$.
2. $P_X((-\infty,a)) = P(X < a) = F(a^-) := \lim_{x\to a, x<a} F(x)$.
3. $P_X((a,b]) = P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$.
4. $P_X([a,b]) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a^-)$.
5. $P_X([a,b)) = P(a \le X < b) = F(b^-) - F(a^-)$.
6. $P_X((a,b)) = P(a < X < b) = F(b^-) - F(a)$.
7. $P_X(\{x\}) = P(X = x) = F(x) - F(x^-)$.



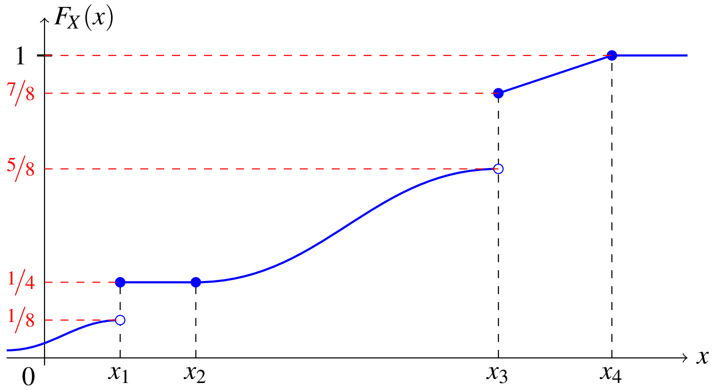
*Bewijs.* 1. Onmiddelijk uit $(x,+\infty) = (-\infty,x]^c$ en stelling 1.3.

2. <u>Geen examenstof:</u> Beschouw de niet-dalende rij gebeurtenissen $A_n = (-\infty, a - 1/n]$, en bemerk dat $(-\infty,a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pas nu het lemma 3.1 toe:
$$P_X((-\infty,a)) = \lim_{n\to\infty} P_X(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(a - 1/n) = \lim_{x\to a, x<a} F(x).$$
3. Onmiddellijk uit $(-\infty,b] = (-\infty,a] \cup (a,b]$ [disjuncte unie] en axioma 3.
4. Onmiddellijk uit 2 en $(-\infty,b] = (-\infty,a) \cup [a,b]$ [disjuncte unie].
5. Onmiddellijk uit 2 en $(-\infty,b) = (-\infty,a) \cup [a,b)$ [disjuncte unie].
6. Onmiddellijk uit 2 en $(-\infty,b) = (-\infty,a] \cup (a,b)$ [disjuncte unie].
7. Onmiddellijk uit 4 met $a = b = x$.

□

## Eigenschappen van distributiefuncties: voorbeeld

3.14 Distributiefuncties [DG:3.3]




Uit een grafiek van de distributiefunctie kunnen de waarschijnlijkheden van gebeurtenissen worden afgelezen.

Er zijn, naast de distributiefunctie $F_X$, nog andere manieren om de distributie $P_X$ van een reële toevallige veranderlijke $X$ te kenmerken (of vast te leggen). In tegenstelling tot de distributiefunctie, die algemeen bruikbaar is, zijn die andere manieren toegespitst op bijzondere gevallen, waarvan we hier de twee belangrijkste gevallen bekijken: discrete en continue reële toevallige veranderlijken.

# 4 Discrete toevallige veranderlijken en hun verdeling

## Definitie van een discrete toevallige veranderlijke

3.15 Discrete toevallige veranderlijken [DG:3.1,3.3]

**Discrete toevallige veranderlijke**
Een toevallige veranderlijke $X$ heet discreet [Eng. discrete] wanneer de verzameling $\mathscr{W}_X$ van de mogelijke waarden aftelbaar is: in essentie een deel van $\mathbb{Z}$, of zelfs van $\mathbb{Q}$.

Men zegt dan ook dat $X$ een discrete verdeling heeft [Eng. discrete distribution].

Voorbeelden:

- De som van het aantal ogen van twee worpen met dezelfde dobbelsteen
- Het aantal radioactieve kernen dat binnen een bepaald tijdsinterval desintegreert
- De winst bij tossen als munt je 1 euro oplevert, en kop 6 euro
- Het aantal mensen binnen een testgroep dat zal sterven binnen de vijf jaar na een alternatieve behandeling

## Definitie van de massafunctie

3.16 Discrete toevallige veranderlijken [DG:3.1,3.3]

**Praktisch probleem:**
Als $X$ $n$ waarden kan aannemen, moeten we op het eerste gezicht $2^n$ waarden voor de verdeling $P_X$ vastleggen.

Het kan echter zuiniger en efficiënter:

**Definitie: Massafunctie [Eng. (probability) mass function, probability function]**
Zij $X$ een discrete toevallige veranderlijke. Dan noemen we de functie:

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

gegeven door

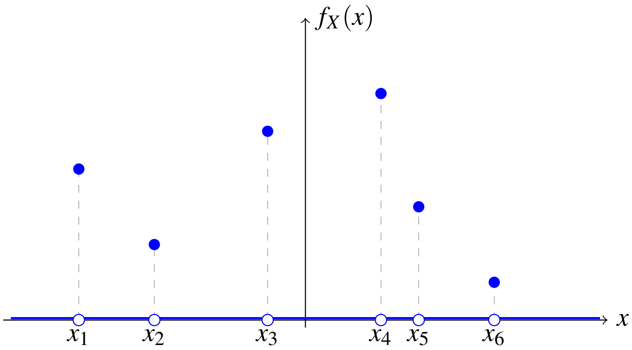
$$f_X(x) = P(X = x) = P_X(\{x\}), \quad x \in \mathbb{R}$$

de massafunctie van $X$.

**Opmerking:**
Wanneer duidelijk is over welke $X$ het gaat, laten we soms de index $_X$ weg in $f_X$.

## Definitie van de massafunctie: voorbeeld






Belangrijk: $f_X(x) \neq 0$ in slechts een aftelbaar aantal $x = x_k \in \mathscr{W}_X$

## Eigenschappen van de massafunctie



**Stelling 3.3**
Zij $X$ een discrete toevallige veranderlijke met verzameling $\mathscr{W}_X$ van mogelijke waarden $x_k \in \mathbb{R}$, massafunctie $f$ en distributiefunctie $F$. Dan:

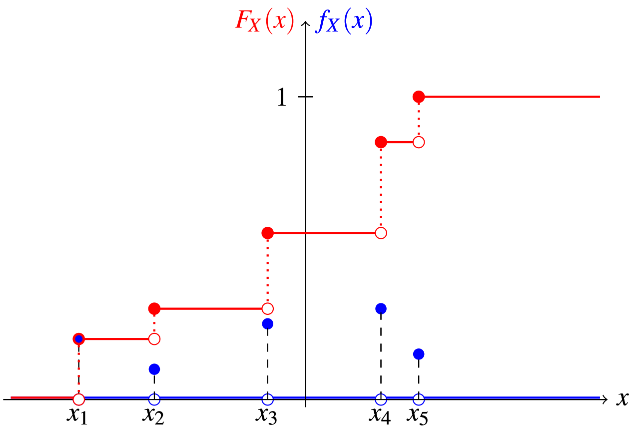
1. Positiviteit: $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;
2. Normering:
$$\sum_{x_k \in \mathscr{W}_X} f(x_k) = 1,$$
3. voor elke $A \subseteq \mathbb{R}$:
$$P_X(A) = \sum_{x_k \in \mathscr{W}_X \,:\, x_k \in A} f(x_k) \overset{\text{symbolisch}}{=} \sum_{x \in A} f(x);$$
We gebruiken deze notatie symbolisch, zelfs wanneer $A$ een overaftelbaar aantal elementen heeft, omdat we weten dat $f$ maar kan verschillen van 0 in een hooguit aftelbaar elementen van $\mathbb{R}$, en de (reeks)som dus effectief maar genomen wordt over een hooguit aftelbaar elementen.
4. voor elke $x \in \mathbb{R}$:
$$F(x) = \sum_{x_k \in \mathscr{W}_X \,:\, x_k \leq x} f(x_k) \text{ en } f(x) = F(x) - F(x^-).$$
Dit betekent dat de distributiefunctie $F$ slechts discontinu is (een sprong maakt) in het hooguit aftelbaar aantal punten waar de massa $f$ verschilt van 0, en continu is in alle andere punten. De grootte van de sprong in een punt, is de massa in dat punt.

De massafunctie $f_X$ bepaalt de verdeling $P_X$ en de distributiefunctie $F_X$ volledig (en omgekeerd).

Vergelijk dit resultaat met stellingen 1.9 en 1.10.

## Massafunctie en distributiefunctie: voorbeeld






$F_X$ is een rechtscontinue stapfunctie met sprong $f(x_k)$ in $x_k$.

## Voorbeeld: uniforme verdeling



**Discrete uniforme verdeling [Eng. discrete uniform distribution]**
De toevallige veranderlijke $X$ kan alleen waarden aannemen in $\{1,2,\ldots,n\}$, en elk van die waarden met dezelfde waarschijnlijkheid:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{als } x = 1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

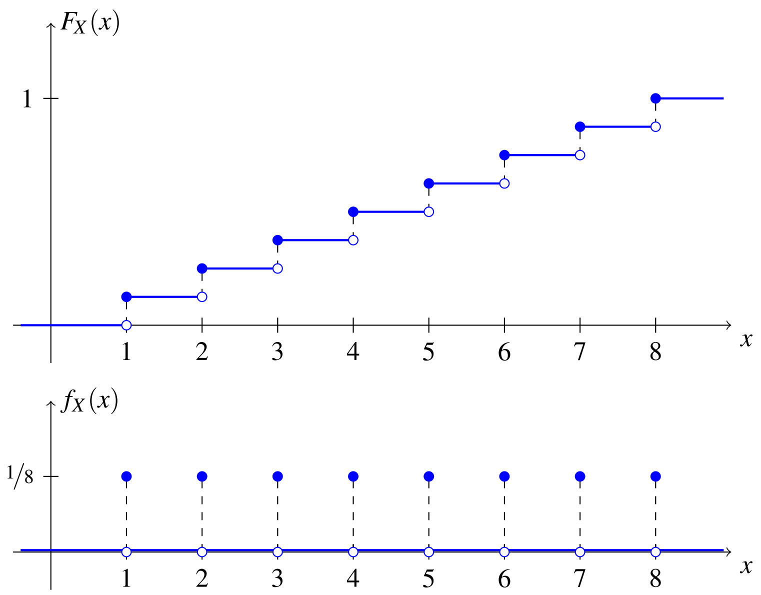
kenmerkt de uniforme verdeling op $\{1,\ldots,n\}$. We zeggen dat $X$ uniform over $\{1,\ldots,n\}$ verdeeld is.

**Opmerking:**
Deze verdeling kenmerkt de uitkomst van een experiment waarbij een van de getallen 1, …, $n$ op toevallige of a-selecte of lukrake wijze worden gekozen [Eng. chosen at random].

**Opmerking:**
De uniforme verdeling op $\mathbb{N}$ bestaat niet. Waarom niet?

## Voorbeeld: uniforme verdeling op $\{1,2,\ldots,7,8\}$






## Voorbeeld: binomiale verdeling



**Binomiale verdeling [Eng. binomial distribution]**
Beschouw een experiment met twee mogelijke uitkomsten, $a$ en $b$.
De waarschijnlijkheid van $a$ is $p$ en de waarschijnlijkheid van $b$ is $q$.

$$0 \leq p,q \leq 1 \text{ en } p+q = 1.$$

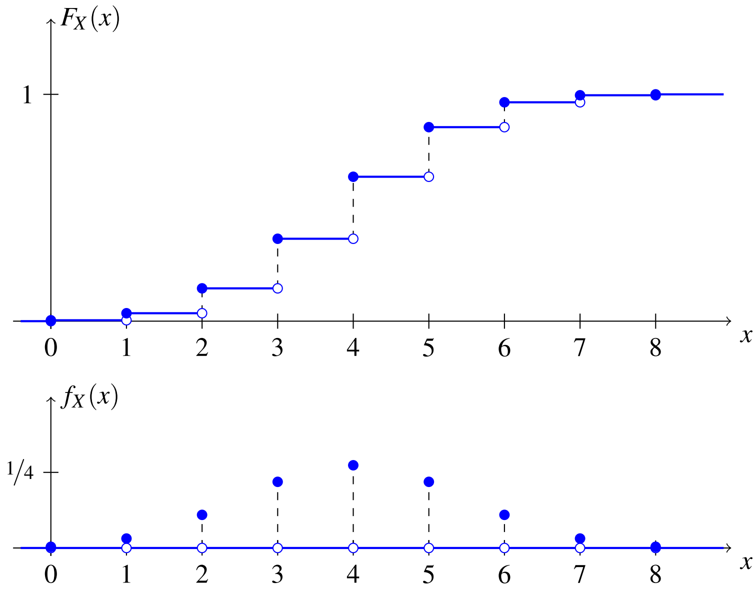
Het experiment wordt $n$ keer herhaald, en de herhalingen zijn onafhankelijk van elkaar.
De toevallige veranderlijke $X$ stelt het aantal keer voor dat de uitkomst $a$ is in die $n$ experimenten.

$$f(x) = \begin{cases} \dbinom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{als } x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

kenmerkt de binomiale verdeling op $\{0,1,\ldots,n\}$. We zeggen dat $X$ binomiaal verdeeld is.

## Voorbeeld: binomiale verdeling met $n = 8$ en $p = q = 1/2$

3.23
Discrete toevallige veranderlijken [DG:3.1,3.3]




## Twee toevallige veranderlijken met dezelfde verdeling

3.24
Toevallige veranderlijken [DG:3.1,3.3]

**Twee toevallige veranderlijken kunnen dezelfde verdeling hebben!**

- Gooi een fair muntstuk $n$ keer op; zij $X_1$ het aantal keer kop. De verdeling van $X_1$ is gekenmerkt door de binomiale massafunctie met $p = q = 1/2$

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \dfrac{1}{2^n} & \text{als } x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- Gooi een faire dobbelsteen $n$ keer; zij $X_2$ het aantal keer dat een even aantal ogen wordt gegooid. De verdeling van $X_2$ is gekenmerkt door de binomiale massafunctie met $p = q = 1/2$

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \dfrac{1}{2^n} & \text{als } x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

# 5 Continue toevallige veranderlijken en hun verdeling

## Definitie

3.25
Continue toevallige veranderlijken [DG:3.2–3.2]

**Continue toevallige veranderlijke**
Een toevallige veranderlijke $X$ heet continu [Eng. continuous] wanneer de verzameling van de mogelijke waarden overaftelbaar is: in essentie $\mathbb{R}$, of een deelinterval van $\mathbb{R}$.

Men zegt dan ook dat $X$ een continue verdeling heeft [Eng. continuous distribution].

Voorbeelden:

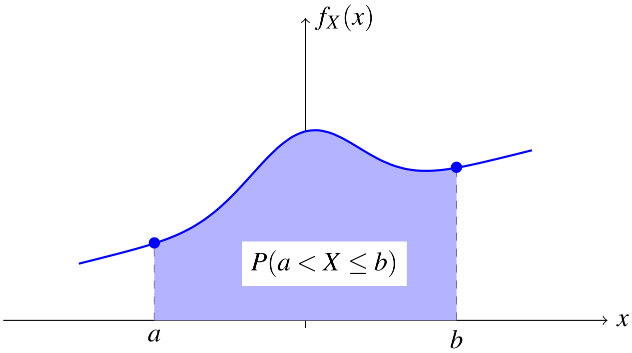
- De body-mass-index $M/L^2$ van een willekeurig geselecteerd lid van een groep testpersonen
- De grootte van de stroom door een weerstand bij een gegeven spanningsverschil
- De temperatuur van het water in deze pan als ze gedurende vijf minuten is opgewarmd

## Bijkomende voorwaarde

3.26 Continue toevallige veranderlijken [DG:3.2–3.2]

**Belangrijke bijkomende voorwaarde**
Een reële toevallige veranderlijke $X$ heet continu als er een reële afbeelding $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat voor alle $a \leq b$ in $\mathbb{R}$:

$$P_X((a,b]) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$



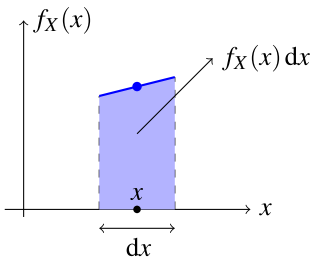

## Densiteit

3.27 Continue toevallige veranderlijken [DG:3.2–3.2]

**Namen voor $f_X$:**

- waarschijnlijkheidsdichtheidsfunctie van $X$ [Eng. probability density function, pdf]
- dichtheid, dichtheidsfunctie van $X$
- densiteit van $X$

**Opmerking:**
Wanneer duidelijk is over welke $X$ het gaat, laten we soms de index $_X$ weg in $f_X$.




De waarschijnlijkheid dat $X$ een waarde aanneemt in een infinitesimaal interval met lengte $\mathrm{d}x$ rondom $x$ is gegeven door:

$$f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

De waarde van de densiteit $f_X(x)$ in $x$ is nooit de waarschijnlijkheid dat $X = x$. Wel is $f_X(x)\,\mathrm{d}x$ de waarschijnlijkheid dat $X$ een waarde inneemt in een infinitesimaal interval met lengte $\mathrm{d}x$ rondom $x$, zoals bijvoorbeeld $[x, x + \mathrm{d}x]$.

## Eigenschappen van densiteit

3.28 Continue toevallige veranderlijken [DG:3.2–3.2]

**Stelling 3.4: eigenschappen van de densiteit**
Beschouw de densiteit $f$ van een continue toevallige veranderlijke $X$.

1. $f$ is uniek bepaald tot op een aftelbaar aantal waarden na.
2. $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. [positiviteit]
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. [normering]

Zonder bewijs.

## Verband tussen densiteit en distributiefunctie

3.29
Continue toevallige veranderlijken [DG:3.2–3.2]

**Belangrijk verband tussen $F_X$ en $f_X$**
Beschouw een continue toevallige veranderlijke $X$ met densiteit $f_X$ en distributiefunctie $F_X$.
We zien meteen dat voor alle $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

en dus is $F_X$ een primitieve functie van $f_X$, en dus continu.
In $x_1 \in \mathbb{R}$ waar $f_X$ continu is, is $F_X$ afleidbaar, en vinden we ook:

$$f_X(x_1) = DF_X(x_1) = \frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x}(x_1)$$

Om deze reden noemt men $f_X$ ook wel de differentiële distributiefunctie van $X$.

## De waarschijnlijkheid van individuele waarden

3.30
Continue toevallige veranderlijken [DG:3.2–3.2]

**Belangrijke opmerking:**
Zij $X$ een continue toevallige veranderlijke met densiteit $f$.
Voor elke $x \in \mathbb{R}$:

$$P_X(\{x\}) = P(X = x) = 0.$$

Voor een continue veranderlijke is de waarschijnlijkheid van een punt (singleton) nul!
Voor alle $a \leq b$ in $\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} P_X((a,b)) &= P(a < X < b) \\ P_X((a,b]) &= P(a < X \leq b) \\ P_X([a,b)) &= P(a \leq X < b) \\ P_X([a,b]) &= P(a \leq X \leq b) \end{aligned}\right\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Voor een continue veranderlijke hangt de waarschijnlijkheid van een interval niet af van het al dan niet inbegrepen zijn van de grenzen!

## Voorbeeld: uniforme verdeling

3.31
Continue toevallige veranderlijken [DG:]

**Continue uniforme verdeling [Eng. continuous uniform distribution]**
De toevallige veranderlijke $X$ kan alleen waarden aannemen in het reële interval $[a,b]$, en de waarschijnlijkheid van een interval hierbinnen is evenredig met zijn lengte:

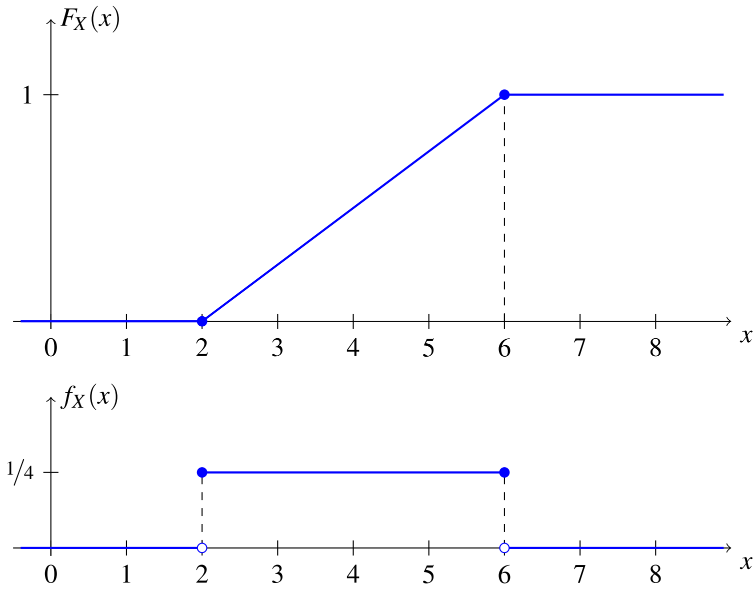
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{als } x \in [a,b] \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

kenmerkt de uniforme verdeling op $[a,b]$. We zeggen dat $X$ uniform verdeeld is.

**Opmerking:**
Deze verdeling kenmerkt de uitkomst van een experiment waarbij een reëel getal op toevallige of a-selecte of lukrake wijze wordt gekozen [Eng. chosen at random] in $[a,b]$.

**Opmerking:**
De uniforme verdeling op $\mathbb{R}$ bestaat niet. Waarom niet?

## Voorbeeld: uniforme verdeling op $[2,6]$






## Voorbeeld van een onbegrensde toevallige veranderlijke

Beschouw de continue toevallige veranderlijke $X$ met densiteit:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

Dan geldt:

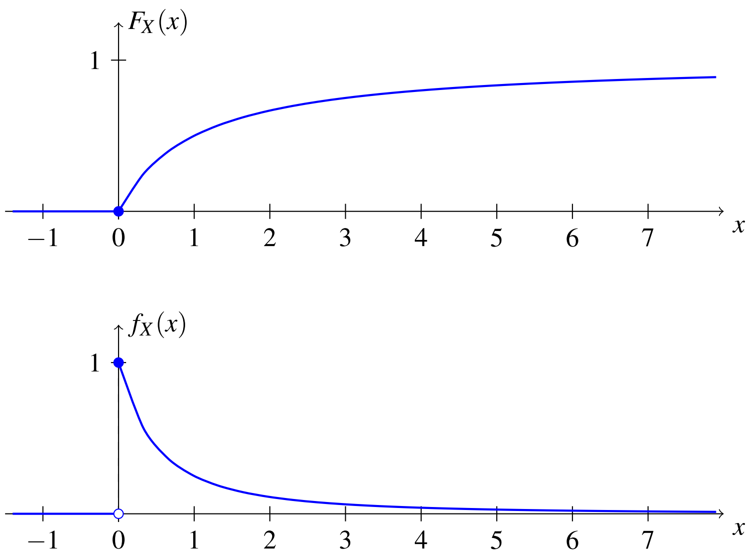
1. $P_X((-\infty, 0]) = P(X \leq 0) = 0.$ [$X$ is positief]
2. Voor elke $a \geq 0$: [$X$ is onbegrensd]

$$P(X \geq a) = P_X([a, +\infty)) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+a} > 0.$$

3. Voor elke $a \geq 0$:

$$F_X(a) = P_X((-\infty, a])) = \int_0^a \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{1+a}.$$





# 6 Vergelijking tussen discrete en continue veranderlijken

## Massafunctie versus densiteit

3.35
Vergelijking tussen discrete en continue veranderlijken

**Massafunctie**
Definitie:

$$f_X(x) = P(X = x) = P_X(\{x\})$$

Normering:

$$\sum_{x \in \mathscr{W}_X} f_X(x) = 1$$

Verband met waarschijnlijkheid:

$$P(X \in A) = \sum_{x \in \mathscr{W}_X \,:\, x \in A} f_X(x)$$

Verband met distributiefunctie:

$$F_X(x) = \sum_{z \in \mathscr{W}_X \,:\, z \leq x} f_X(z)$$

$$f_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

**Densiteit**
Definitie:

$$f_X(x)\,\mathrm{d}x = P(X \in [x, x + \mathrm{d}x])$$

Normering:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Verband met waarschijnlijkheid:

$$P(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Verband met distributiefunctie:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(z)\,\mathrm{d}z$$

$$f_X(x) = DF_X(x)$$

# 7 Fractielen

## Definitie

3.36
Fractielen [DG:3.3]

**Definitie: Fractielen (ook: kwantielen) [Eng. fractiles, quantiles]**
Zij $X$ een reële toevallige veranderlijke met distributiefunctie $F_X$. Zij $\alpha \in (0,1)$.
Men noemt het $\alpha$-fractiel van $X$ [Eng. $\alpha$-quantile] het reële getal:

$$q_\alpha := \min\{x \in \mathbb{R} \colon F_X(x) \geq \alpha\}.$$

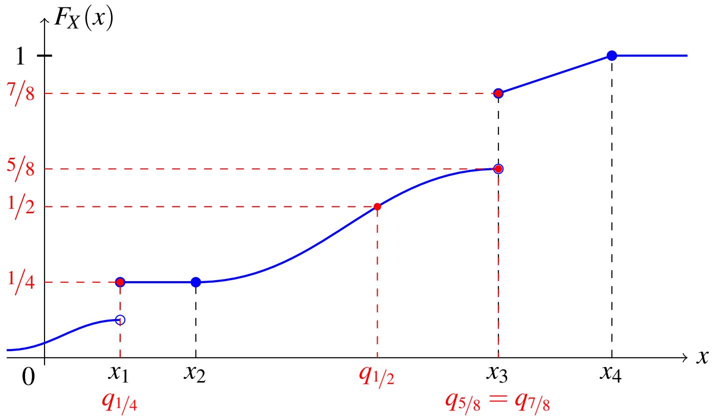
**Andere namen voor bijzondere gevallen**

**$\alpha = 1/2$:** mediaan [Eng. median]
**$\alpha = 1/4, 3/4$:** kwartielen [Eng. quartiles]
**$\alpha = p/100$:** $p$-percentiel [Eng. $p$-percentile]

Merk op: waar $F_X$ strikt stijgend en dus inverteerbaar is, is $q$ de inverse functie van $F_X$. In gebieden waar $F_X$ constant is, geeft $q$ de linkergrens van dat gebied. Je kunt $q$ uit $F_X$ vinden door spiegelen in de eerste diagonaal.

### Voorbeeld: afleiden van fractielen 3.37 Fractielen [DG:3.3]

Fractielen kunnen vaak worden bepaald uit de grafiek van de distributiefunctie.




# 8 Tweedimensionale toevallige veranderlijken

### Definitie 3.38 Tweedimensionale toevallige veranderlijken [DG:3.4]

**Definitie: Tweedimensionale (reële) toevallige veranderlijke [Eng. two-dimensional (real) random variable]**
Een tweedimensionale (reële) toevallige veranderlijke $(X,Y)$ is een veranderlijke in $\mathbb{R}^2$ waarvan we de waarde niet goed kennen:

- de waardenverzameling is een deel van $\mathbb{R}^2$
- een mogelijke of werkelijke waarde stellen we voor door $(x,y)$

Ze is een koppel van twee reële toevallige veranderlijken $X$ en $Y$.

### Voorbeelden van tweedimensionale toevallige veranderlijken 3.39 Tweedimensionale toevallige veranderlijken [DG:3.4]

Voorbeelden:

- de twee uitkomsten van twee keer gooien met eenzelfde dobbelsteen [discreet]
- het aantal haren op het hoofd van een willekeurig gekozen student in dit auditorium, en dat van zijn grootvader langs moederszijde [discreet]
- het aantal pakketjes dat per dag door een router wordt gestuurd, en het aantal dat er verloren gaat [discreet]
- de lengte van één en het gewicht van een andere willekeurig gekozen studente in dit auditorium [continu]
- de windsterkte in de haven van Oostende, en de kracht op een van de pijlers van het staketsel daar [continu]
- de ouderdom van een willekeurig gekozen auto in het Vlaams Gewest, en het aantal kilometers op de teller [gemengd]
- de tijdsgemiddelde intensiteit van de volgende aardbeving in Tokyo, en het aantal huizen dat ten gevolge van die aardbeving moet worden hersteld [gemengd]

### Motivering 3.40 Tweedimensionale toevallige veranderlijken [DG:3.4]

**Belangrijke opmerking:**
Zo'n tweedimensionale toevallige veranderlijke $(X,Y)$ wordt vaak gezien als een functie (of een koppel functies) van een steekproefruimte $\mathscr{S}$ naar (een deel van) $\mathbb{R}^2$:

$$X : \mathscr{S} \to \mathbb{R} \qquad Y : \mathscr{S} \to \mathbb{R} \qquad (X,Y) : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^2$$

en de waarde die $(X,Y)$ aanneemt in $s \in \mathscr{S}$ is gegeven door

$$(X(s),Y(s)) \in \mathbb{R}^2.$$

Dit stelt ons in staat om te kijken naar de waarden die $X$ en $Y$ samen aannemen, eerder dan elk afzonderlijk.

Zo kunnen eventuele verbanden, of afhankelijkheden, tussen $X$ en $Y$ worden gemodelleerd (d.w.z., wiskundig voorgesteld).

# 9 Gemeenschappelijke verdeling

## Definitie

3.41 Gemeenschappelijke verdeling [DG:3.4]

Hoe gaan we onze kennis voorstellen over de waarden die $X$ en $Y$ samen kunnen aannemen? Net zoals in het eendimensionale geval!

Voor elke gebeurtenis $A \subseteq \mathbb{R}^2$ is er een getal:

$$\begin{aligned} P_{(X,Y)}(A) &= \text{ de waarschijnlijkheid dat } (X,Y) \in A \\ &= P((X,Y) \in A) \\ &= P(\{s \in \mathscr{S} : (X(s),Y(s)) \in A\}) \end{aligned}$$

**Definitie**
De waarschijnlijkheidsmaat $P_{(X,Y)}$ wordt de (waarschijnlijkheids)verdeling of de distributie van de (tweedimensionale) toevallige veranderlijke $(X,Y)$ genoemd.

**Opmerking:**
Wanneer duidelijk is over welke $(X,Y)$ het gaat, laten we soms de index $_{(X,Y)}$ weg in $P_{(X,Y)}$.

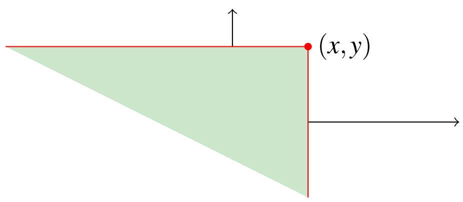
## Gemeenschappelijke distributiefunctie

3.42 Gemeenschappelijke verdeling [DG:3.4]

**Definitie: Gemeenschappelijke (cumulatieve) distributiefunctie [Eng. joint (cumulative) distribution function, joint cdf]**
Beschouw een tweedimensionale toevallige veranderlijke $(X,Y)$ met verdeling $P_{(X,Y)}$. Dan wordt de functie $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$F_{(X,Y)}(x,y) := P_{(X,Y)}((-\infty,x] \times (-\infty,y]) = P(X \leq x \text{ en } Y \leq y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

de gemeenschappelijke (cumulatieve) distributiefunctie van $(X,Y)$, of van $X$ en $Y$, genoemd.



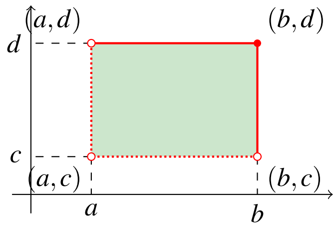

**Opmerking:**
Wanneer duidelijk is over welke $X$ en $Y$ het gaat, laten we soms de index $_{(X,Y)}$ weg in $F_{(X,Y)}$.

3.43 Gemeenschappelijke verdeling [DG:3.4]

**Opmerking: $F_{(X,Y)}$ bepaalt $P_{(X,Y)}$ en omgekeerd**
Wanneer we $F_{(X,Y)}$ kennen, kunnen we ook $P_{(X,Y)}(A)$ bepalen voor alle 'interessante' gebeurtenissen $A \subseteq \mathbb{R}^2$. [Zonder bewijs]

**Voorbeeld: waarschijnlijkheid van een rechthoek**

$$\begin{aligned} P_{(X,Y)}((a,b] \times (c,d]) &= P(a < X \leq b \text{ en } c < Y \leq d) \\ &= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \end{aligned}$$




## Gemeenschappelijke massafunctie

3.44 Gemeenschappelijke verdeling [DG:3.4]

**Gemeenschappelijke massafunctie [Eng. joint mass function]**
Een tweedimensionale toevallige veranderlijke $(X,Y)$ heet discreet wanneer de verzameling $\mathscr{W}_{(X,Y)}$ van de mogelijke waardenkoppels $(x_k, y_k)$ aftelbaar is. Dan noemen we de functie:

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

gegeven door

$$f_{(X,Y)}(x,y) = P(X = x \text{ en } Y = y) = P_{(X,Y)}(\{(x,y)\}), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

de gemeenschappelijke massafunctie van $(X,Y)$, of van $X$ en $Y$.

**Opmerking:**
Wanneer $(x,y) \notin \mathscr{W}_{(X,Y)}$ is duidelijk dat $f_{(X,Y)}(x,y) = 0$.

**Opmerking:**
Wanneer duidelijk is over welke $(X,Y)$ het gaat, laten we soms de index $_{(X,Y)}$ weg in $f_{(X,Y)}$.

## Eigenschappen van de gemeenschappelijke massafunctie

3.45 Gemeenschappelijke verdeling [DG:3.4]

**Stelling 3.5**
Zij $(X,Y)$ een discrete tweedimensionale toevallige veranderlijke met verzameling $\mathscr{W}_{(X,Y)}$ van mogelijke waardenkoppels $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, gemeenschappelijke massafunctie $f$ en distributiefunctie $F$.

1. Positiviteit: $f(x,y) \geq 0$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
2. Normering:
$$\sum_{(x_k,y_k) \in \mathscr{W}_{(X,Y)}} f(x_k, y_k) = 1,$$
3. voor elke $A \subseteq \mathbb{R}^2$:
$$P_{(X,Y)}(A) = \sum_{(x_k,y_k) \in \mathscr{W}_{(X,Y)} :\ (x_k,y_k) \in A} f(x_k, y_k) \overset{\text{symbolisch}}{=} \sum_{(x,y) \in A} f(x,y);$$
4. voor elke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$F(x,y) = \sum_{\substack{(x_k,y_k) \in \mathscr{W}_{(X,Y)} \\ x_k \leq x \text{ en } y_k \leq y}} f(x_k, y_k) \text{ en } f(x,y) = F(x,y) - F(x^-, y^-).$$

$f_{(X,Y)}$ bepaalt $P_{(X,Y)}$ en $F_{(X,Y)}$ volledig (en omgekeerd).

3.46 Gemeenschappelijke verdeling [DG:3.4]

*Bewijs.*
1. Onmiddellijk uit axioma 1.
2. Onmiddellijk uit axioma 2 en stelling 1.6.
3. Onmiddellijk uit stelling 1.6.
4. Het eerste deel is een bijzonder geval van 3 met $A = (-\infty, x] \times (-\infty, y]$. Voor het tweede deel geven we geen bewijs [maar analoog met stelling 3.2.7].

□

## Voorbeeld van een discrete tweedimensionale veranderlijke

3.47 Gemeenschappelijke verdeling [DG:3.4]

Mogelijke waardenkoppels voor $(X,Y)$ zijn:

$$(1,1) \quad (2,1) \quad (3,1) \quad (1,3) \quad (3,3)$$

$f$ is nul in alle andere reële koppels, en

| $f$ | $X=1$ | $X=2$ | $X=3$ |
|---|---|---|---|
| $Y=1$ | $1/4$ | $1/8$ | $1/8$ |
| $Y=3$ | $1/4$ | $0$ | $1/4$ |

Dan bijvoorbeeld:

$$F(2,3) = f(1,1) + f(1,3) + f(2,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

en

$$P(X=Y) = f(1,1) + f(3,3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

## Gemeenschappelijke densiteit

3.48 Gemeenschappelijke verdeling [DG:3.4]

**Gemeenschappelijke densiteit [Eng. joint probability density function, joint pdf]**
Een tweedimensionale toevallige veranderlijke $(X,Y)$ heet continu wanneer er een functie

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

bestaat zo dat voor 'alle' $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} P_{(X,Y)}(A) = P((X,Y) \in A) &= \iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \text{ het volume onder } f_{(X,Y)} \text{ binnen } A. \end{aligned}$$

Dan noemen de $f_{(X,Y)}$ gemeenschappelijke densiteit van $(X,Y)$, of van $X$ en $Y$.

**Opmerking:**
Wanneer duidelijk is over welke $(X,Y)$ het gaat, laten we soms de index $_{(X,Y)}$ weg in $f_{(X,Y)}$.

## Eigenschappen van de gemeenschappelijke densiteit

3.49 Gemeenschappelijke verdeling [DG:3.4]

**Stelling 3.6 (zonder bewijs)**
Zij $(X,Y)$ een continue tweedimensionale toevallige veranderlijke met gemeenschappelijke densiteit $f$ en distributiefunctie $F$. Dan geldt:

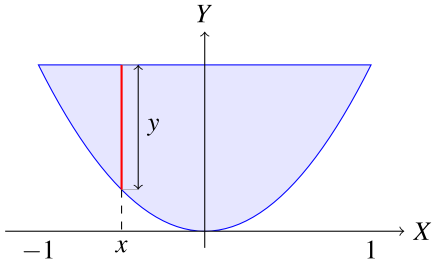
1. Positiviteit: $f(x,y) \geq 0$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
2. Normering:
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$
3. voor elke $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:
$$F(a,b) = \iint_{(-\infty,a]\times(-\infty,b]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
en waar $f$ continu is, hebben we:
$$f(a,b) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a,b).$$

$f_{(X,Y)}$ bepaalt $P_{(X,Y)}$ en $F_{(X,Y)}$ volledig (en omgekeerd wanneer $F$ voldoende afleidbaar is).

## Voorbeeld van gemeenschappelijke densiteit 3.50 Gemeenschappelijke verdeling [DG:3.4]

Zij $(X,Y)$ een continue tweedimensionale toevallige veranderlijke met gemeenschappelijke densiteit $f$ gegeven door

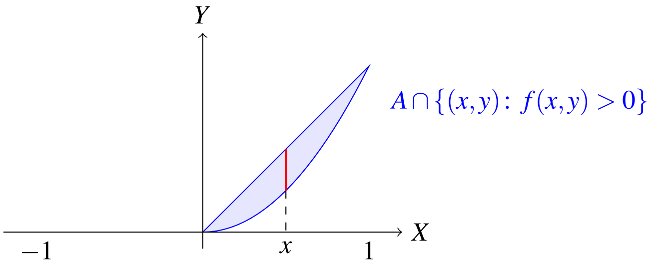
$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y & \text{als } x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$




$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \left(\int_{x^2}^{1} cx^2y\,\mathrm{d}y\right) = c\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x \left(\int_{x^2}^{1} y\,\mathrm{d}y\right)$$
$$= c\int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2}\left(1-x^4\right)\mathrm{d}x = c\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-x^6\right)\mathrm{d}x = c\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right) = \frac{4}{21}c.$$

3.51 Gemeenschappelijke verdeling [DG:3.4]

Wat is de waarschijnlijkheid van de gebeurtenis $A$ dat $X \ge Y$?




$$P_{(X,Y)}(A) = P(X \ge Y)$$
$$= \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\left(\int_{x^2}^{x} y\,\mathrm{d}y\right) = c\int_0^1 x^2\frac{1}{2}\left(x^2-x^4\right)\mathrm{d}x$$
$$= c\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^4-x^6\right)\mathrm{d}x = c\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{21}{4}\frac{1}{2}\frac{2}{35} = \frac{3}{20}.$$

# 10 Marginale verdelingen

## Motivering 3.52 Marginale verdelingen [DG:3.5]

**Startpunt**

Als we weten hoe $X$ en $Y$ samen verdeeld zijn, dan kunnen we hieruit in het bijzonder ook afleiden hoe $X$ en $Y$ elk afzonderlijk verdeeld zijn.

**Het komt allemaal neer op:**

$$X \in A \Leftrightarrow X \in A \text{ en } Y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (X,Y) \in A \times \mathbb{R}$$

en dus

$$P_X(A) = P(X \in A) = P((X,Y) \in A \times \mathbb{R}) = P_{(X,Y)}(A \times \mathbb{R})$$

en analoog

$$P_Y(B) = P(Y \in B) = P((X,Y) \in \mathbb{R} \times B) = P_{(X,Y)}(\mathbb{R} \times B)$$

## Definitie

3.53 Marginale verdelingen [DG:3.5]

**Definitie: Marginale verdelingen [Eng. marginal distributions]**
Beschouw een tweedimensionale toevallige veranderlijke $(X,Y)$ met gemeenschappelijke verdeling $P_{(X,Y)}$. Dan worden de waarschijnlijkheidsmaten $P_X$ en $P_Y$, gegeven door

$$P_X(A) = P_{(X,Y)}(A \times \mathbb{R}), \quad A \subseteq \mathbb{R}$$

en

$$P_Y(B) = P_{(X,Y)}(\mathbb{R} \times B), \quad B \subseteq \mathbb{R}$$

de marginale verdelingen van de respectieve toevallige veranderlijken $X$ en $Y$ genoemd.

## Marginale distributiefuncties

3.54 Marginale verdelingen [DG:3.5]

**Stelling 3.7: Marginale distributiefuncties [Eng. marginal distribution functions]**
De marginale distributiefunctie $F_X$ van $X$ wordt gegeven door:

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = \lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x,y), \quad x \in \mathbb{R},$$

en analoog wordt de marginale distributiefunctie $F_Y$ van $Y$ gegeven door:

$$F_Y(y) = P_Y((-\infty, y]) = \lim_{x \to +\infty} F_{(X,Y)}(x,y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

*Bewijs. (Geen examenstof).* We geven het bewijs voor $F_X$. Beschouw $x \in \mathbb{R}$, dan

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P_X((-\infty, x]) \\
&= P_{(X,Y)}((-\infty, x] \times \mathbb{R}) \\
&= \lim_{y \to +\infty} P_{(X,Y)}((-\infty, x] \times (-\infty, y]) && \text{(lemma 3.1)} \\
&= \lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x,y).
\end{aligned}$$

□

## Marginale massafuncties

3.55 Marginale verdelingen [DG:3.5]

**Stelling 3.8: Marginale massafuncties [Eng. marginal probability mass functions]**
Zij $(X,Y)$ een discrete tweedimensionale toevallige veranderlijke met verzameling $\mathscr{W}_{(X,Y)}$ van mogelijke waardenkoppels $(x_k, y_k)$. Dan is $X$ een discrete toevallige veranderlijke met verzameling van mogelijke waarden

$$\mathscr{W}_X = \left\{ x_k \colon (\exists y_k)(x_k, y_k) \in \mathscr{W}_{(X,Y)} \right\}, \tag{1}$$

en marginale massafunctie $f_X$ gegeven door:

$$f_X(x) = P_X(\{x\}) = \sum_{y\colon (x,y) \in \mathscr{W}_{(X,Y)}} f_{(X,Y)}(x,y) \overset{\text{symbolisch}}{=} \sum_{y} f_{(X,Y)}(x,y) \quad x \in \mathbb{R},$$

en analoog voor $Y$. Merk op dat $f_X(x) = 0$ wanneer $x \notin \mathscr{W}_X$.

Om $f_X(x)$ te vinden, wordt de veranderlijke $y$ in $f_{(X,Y)}$ weggesommeerd.

3.56 Marginale verdelingen [DG:3.5]

*Bewijs.* We beperken ons tot $X$. Het bewijs voor $Y$ is analoog.

Het bewijs van (1) is triviaal: $x_k$ is een mogelijke waarde voor $X$ wanneer het de eerste component is van een koppel $(x_k, y_k)$ dat tot $\mathscr{W}_{(X,Y)}$ behoort.

Nu de rest van het bewijs. Zij $x \in \mathbb{R}$, dan

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= P_X(\{x\}) = P_{(X,Y)}(\{x\} \times \mathbb{R}) \\
&= \sum_{(x_k,y_k) \in \mathscr{W}_{(X,Y)}\colon (x_k,y_k) \in \{x\} \times \mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x_k, y_k) && \text{(stelling 3.5.3)} \\
&= \sum_{y\colon (x,y) \in \mathscr{W}_{(X,Y)}} f_{(X,Y)}(x,y).
\end{aligned}$$

Met deze uitdrukking is het duidelijk dat opdat $f_X(x) > 0$, er zeker een $y \in \mathbb{R}$ moet zijn zo dat $(x,y) \in \mathscr{W}_{(X,Y)}$. Uit (1) volgt dan dat $x \in \mathscr{W}_X$. Het gestelde volgt nu door contrapositie. □

## Voorbeeld van een discrete tweedimensionale veranderlijke

3.57 Marginale verdelingen [DG:3.5]

Mogelijke waardenkoppels voor $(X,Y)$ zijn:

$$(1,1) \quad (2,1) \quad (3,1) \quad (1,3) \quad (3,3)$$

$f$ is nul in alle andere reële koppels, en

| $f$ | $X=1$ | $X=2$ | $X=3$ |
|---|---|---|---|
| $Y=1$ | $1/4$ | $1/8$ | $1/8$ |
| $Y=3$ | $1/4$ | $0$ | $1/4$ |

Dan vinden we voor de marginale massafuncties:

| $f$ | $X=1$ | $X=2$ | $X=3$ | $f_Y$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y=1$ | $1/4$ | $1/8$ | $1/8$ | $1/2$ |
| $Y=3$ | $1/4$ | $0$ | $1/4$ | $1/2$ |
| $f_X$ | $1/2$ | $1/8$ | $3/8$ | |

en $f_X$ en $f_Y$ zijn elders nul.

Dit geeft ook aan waar de naam 'marginale' verdeling vandaan komt: we lezen de marginale massafuncties af in de marges van de tabel met de waarden van de gemeenschappelijke massafunctie.

## Marginale densiteiten

3.58 Marginale verdelingen [DG:3.5]

**Stelling 3.9: Marginale densiteiten [Eng. marginal probability density functions]**
Zij $(X,Y)$ een continue tweedimensionale toevallige veranderlijke. Dan is $X$ een continue toevallige veranderlijke met marginale densiteit

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}$$

en $Y$ is een continue toevallige veranderlijke met marginale densiteit

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad y \in \mathbb{R}$$

Om $f_X(x)$ te vinden, wordt de veranderlijke $y$ in $f_{(X,Y)}$ weggeïntegreerd.

3.59 Marginale verdelingen [DG:3.5]

*Bewijs.* We geven het bewijs voor $X$. Het bewijs voor $Y$ is analoog.

Beschouw een willekeurige gebeurtenis $(a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Dan volgt uit de definitie van de marginale verdeling $P_X$ en de gemeenschappelijke densiteit $f_{(X,Y)}$ dat:

$$\begin{aligned} P_X((a,b]) &= P_{(X,Y)}((a,b] \times \mathbb{R}) \\ &= \iint_{(a,b]\times\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}y \right). \end{aligned}$$

Anderzijds volgt uit de definitie van de marginale densiteit $f_X$ dat:

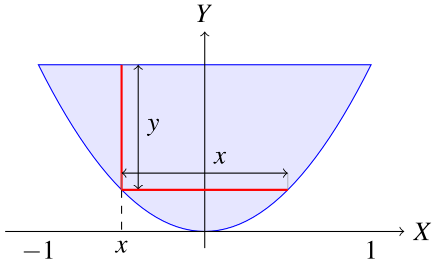
$$P_X((a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Het gestelde volgt nu door identificatie van de rechterleden. □

### Voorbeeld van marginale densiteiten 3.60 Marginale verdelingen [DG:3.5]

Zij $(X,Y)$ een continue tweedimensionale toevallige veranderlijke met gemeenschappelijke densiteit $f$ gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y & \text{als } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$




$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{x^2}^{1} \frac{21}{4}x^2y\,\mathrm{d}y = \frac{21}{4}x^2\left(\int_{x^2}^{1} y\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{21}{4}x^2\frac{1}{2}\left(1-x^4\right) = \frac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right) \end{aligned}$$

wanneer $-1 \leq x \leq 1$, en $f_X(x) = 0$ elders.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4}x^2y\,\mathrm{d}x = \frac{21}{4}y\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{21}{4}y\frac{1}{3}\left((\sqrt{y})^3-(-\sqrt{y})^3\right) = \frac{7}{2}y^{5/2} \end{aligned}$$

wanneer $0 \leq y \leq 1$, en $f_X(x) = 0$ elders.

# 11 Conditionele verdelingen

### Discrete toevallige veranderlijken: Regel van Bayes 3.61 Conditionele verdelingen [DG:3.6]

Zij $(X,Y)$ een discrete tweedimensionale toevallige veranderlijke, en zij $y$ zo dat $f_Y(y) > 0$. Dan definiëren we de conditionele waarschijnlijkheidsmaat $P_{X|Y}(\cdot|y)$ door

$$\begin{aligned} P_{X|Y}(A|y) &= \text{waarschijnlijkheid dat } X \in A \text{ als gegeven is dat } Y = y \\ &= P(X \in A|Y=y) = \frac{P(X \in A \text{ en } Y = y)}{P(Y=y)} \\ &= \frac{P_{(X,Y)}(A \times \{y\})}{P_Y(\{y\})} = \sum_{x\in A} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \sum_{x\in A} f_{X|Y}(x|y), \end{aligned}$$

waarbij we de conditionele massafunctie $f_{X|Y}(\cdot|y)$ als volgt definiëren:

**Regel van Bayes voor massafuncties:**
Voor alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) &= \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} \text{ als } f_Y(y) > 0 \\ &= \text{waarschijnlijkheid dat } X = x \text{ als gegeven is dat } Y = y. \end{aligned}$$

Wanneer geen verwarring mogelijk, laten we soms de index $_{X|Y}$ weg.

### Discrete toevallige veranderlijken: voorbeeld 3.62 Conditionele verdelingen [DG:3.6]

Met de gemeenschappelijke en marginale massafuncties:

| $f_{(X,Y)}$ | $X=1$ | $X=2$ | $X=3$ | $f_Y$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y=1$ | $1/4$ | $1/8$ | $1/8$ | $1/2$ |
| $Y=3$ | $1/4$ | $0$ | $1/4$ | $1/2$ |
| $f_X$ | $1/2$ | $1/8$ | $3/8$ | |

vinden we eenvoudig de conditionele massafuncties:

| $f_{X\|Y}$ | $X=1$ | $X=2$ | $X=3$ |
|---|---|---|---|
| $Y=1$ | $1/2$ | $1/4$ | $1/4$ |
| $Y=3$ | $1/2$ | $0$ | $1/2$ |

en

| $f_{Y\|X}$ | $X=1$ | $X=2$ | $X=3$ |
|---|---|---|---|
| $Y=1$ | $1/2$ | $1$ | $1/3$ |
| $Y=3$ | $1/2$ | $0$ | $2/3$ |

## Discrete toevallige veranderlijken: productregel en totale waarschijnlijkheid

3.63 Conditionele verdelingen [DG:3.6]

**Stelling 3.10: Productregel voor massafuncties**
Zij $(X,Y)$ een discrete tweedimensionale toevallige veranderlijke, en zijn $x$ en $y$ zo dat $f_X(x) > 0$ en $f_Y(y) > 0$. Dan geldt:

$$f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y) = f_{(X,Y)}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x).$$

*Bewijs.* Onmiddellijk uit de regel van Bayes voor massafuncties. □

**Stelling 3.11: Wet van totale waarschijnlijkheid voor massafuncties**
Zij $(X,Y)$ een discrete tweedimensionale toevallige veranderlijke. Dan geldt voor alle $x$ in $\mathbb{R}$:

$$f_X(x) = \sum_y f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y).$$

*Bewijs.* Onmiddellijk uit stelling 3.10 door marginaliseren ($y$ wegsommeren, zie stelling 3.8). □

## Continue toevallige veranderlijken: Regel van Bayes

3.64 Conditionele verdelingen [DG:3.6]

Zij $(X,Y)$ een continue tweedimensionale toevallige veranderlijke, en zij $y \in \mathbb{R}$. Dan definiëren we de conditionele densiteit $f_{X|Y}(\cdot|y)$ als volgt:

**Regel van Bayes voor densiteiten:**
Voor alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} \text{ als } f_Y(y) > 0$$

en wanneer $f_Y(y) = 0$ kan voor $f_{X|Y}(\cdot|y)$ een willekeurige densiteit worden gekozen.

Deze conditionele densiteit leidt tot een conditionele waarschijnlijkheidsmaat $P_{X|Y}(\cdot|y)$ gegeven door:

$$\begin{aligned} P_{X|Y}(A|y) &= \text{waarschijnlijkheid dat } X \in A \text{ als gegeven is dat } Y = y \\ &= P(X \in A|Y = y) \\ &= \int_A f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Wanneer geen verwarring mogelijk, laten we soms de index $_{X|Y}$ weg.

***Belangrijke opmerking bij conditionele densiteiten***
Neem aan dat $Y$ een continue toevallige veranderlijke is.

Hoewel we $P_{X|Y}(A|y)$ de waarschijnlijkheid noemen dat $X \in A$ als gegeven is dat $Y = y$, is dit niet de waarschijnlijkheid van de gebeurtenis $X \in A$ conditioneel op de gebeurtenis $Y = y$. De waarschijnlijkheid $P(Y = y)$ van deze laatste gebeurtenis is immers nul wanneer $Y$ een continue veranderlijke is.

Om te weten wat er echt aan de hand is, kijken we naar de volgende informele redenering:

$$\begin{aligned}
P(X \le x | Y \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)) &= \frac{P((X,Y) \in (-\infty, x] \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon))}{P(Y \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon))} && \text{(Regel van Bayes)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f_{(X,Y)}(x,w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}w}{\displaystyle\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f_Y(w)\,\mathrm{d}w} \\
&\approx \frac{2\varepsilon \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x}{2\varepsilon f_Y(y)} && (\varepsilon \text{ voldoende klein}) \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

We zien dus dat "gegeven is dat $Y = y$" eigenlijk betekent "gegeven is dat $Y$ in een infinitesimaal interval rond $y$ ligt".

### Voorbeeld van conditionele densiteit

3.65 Conditionele verdelingen [DG:3.6]

Zij $(X,Y)$ een continue tweedimensionale toevallige veranderlijke met gemeenschappelijke densiteit $f$ gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2 y & \text{als } x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

We hebben gezien voor de marginale densiteit $f_Y$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{7}{2}y^{5/2} & \text{als } y \in [0,1] \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

en toepassen van de regel van Bayes levert de conditionele densiteit:

$$\text{wanneer } y \in (0,1]: \quad f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 y^{-3/2} & \text{als } x^2 \le y \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

en

$$\text{wanneer } y \notin (0,1]: \quad f_{X|Y}(\cdot|y) = \text{willekeurige densiteit}$$

### Continue toevallige veranderlijken: productregel en totale waarschijnlijkheid

3.66 Conditionele verdelingen [DG:3.6]

**Stelling 3.12: Productregel voor densiteiten**
Zij $(X,Y)$ een continue tweedimensionale toevallige veranderlijke, dan geldt voor alle $x$ en $y$ in $\mathbb{R}$:

$$f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y) = f_{(X,Y)}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x).$$

*Bewijs.* Onmiddellijk uit de regel van Bayes voor densiteiten. □

**Stelling 3.13: Wet van totale waarschijnlijkheid voor densiteiten**
Zij $(X,Y)$ een continue tweedimensionale toevallige veranderlijke. Dan geldt voor alle $x$ in $\mathbb{R}$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

*Bewijs.* Onmiddellijk uit stelling 3.12 door marginaliseren ($y$ wegintegreren, zie stelling 3.9). □

# 12 Onafhankelijke toevallige veranderlijken

## Logische onafhankelijkheid

3.67 Onafhankelijke toevallige veranderlijken [DG:3.5]

**Definitie: Logische onafhankelijkheid [Eng. logical independence]**
Beschouw twee reële toevallige veranderlijken $X$ en $Y$, met respectieve mogelijkhedenverzamelingen $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathscr{Y} \subseteq \mathbb{R}$. Dan zijn $X$ en $Y$ logisch onafhankelijk wanneer de mogelijkhedenverzameling van $(X,Y)$ gegeven is door $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

**Voorbeeld: twee muntstukken**
We gooien twee muntstukken na elkaar. $X$ neemt de waarde 0 aan bij kop voor het eerste muntstuk, en 1 bij munt voor het eerste muntstuk. Analoog neemt $Y$ de waarde 0 aan bij kop voor het tweede muntstuk, en 1 bij munt voor het tweede muntstuk. De mogelijke waarden voor $(X,Y)$ zijn dan:

$$(0,0) \quad (0,1) \quad (1,0) \quad (1,1).$$

Hier zijn de toevallige veranderlijken $X$ en $Y$ logisch onafhankelijk.

**Voorbeeld: een muntstuk**
We gooien een muntstuk. $X$ neemt de waarde 0 aan bij kop en 1 bij munt. $Y$ neemt de waarde 1 aan bij kop en 0 bij munt. De mogelijke waarden voor $(X,Y)$ zijn dan:

$$(0,1) \quad (1,0).$$

Hier zijn de toevallige veranderlijken $X$ en $Y$ niet logisch onafhankelijk.

## Definitie

3.68 Onafhankelijke toevallige veranderlijken [DG:3.5]

**Definitie: Onafhankelijke toevallige veranderlijken [Eng. independent random variables]**
Twee logisch onafhankelijke veranderlijken $X$ en $Y$ worden (stochastisch) onafhankelijk [Eng. (stochastically) independent] genoemd wanneer bijkomende informatie over de waarde die de ene veranderlijke aanneemt, de waarschijnlijkheid van de andere niet verandert.

Dit betekent dat voor elke $A \subseteq \mathbb{R}$ en $B \subseteq \mathbb{R}$ de gebeurtenissen $X \in A$ en $Y \in B$ onafhankelijk zijn:

$$P(X \in A \text{ en } Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

of nog, in termen van de verdelingen:

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X(A)P_Y(B) \tag{2}$$

## Alternatieve karakteristering

3.69 Onafhankelijke toevallige veranderlijken [DG:3.5]

**Stelling 3.14 (zonder bewijs)**
Twee logisch onafhankelijke veranderlijken $X$ en $Y$ zijn onafhankelijk als en slechts als

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y) \text{ voor alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

of equivalent hiermee, als en slechts als

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \text{ voor alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{4}$$

# 13 Meerdimensionale toevallige veranderlijken

## Meer van hetzelfde

3.70 Meerdimensionale toevallige veranderlijken [DG:3.7]

Zelfstudie: zie bijkomende nota's uit DG:3.7 op Minerva. DG:3.8–3.9 is enkel ter informatie meegegeven.

# 14 Transformaties van toevallige veranderlijken

## Discrete toevallige veranderlijken

3.71 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

**Stelling 3.15**
Beschouw twee discrete toevallige veranderlijken $X$ en $Y$, en neem aan dat er een bijectieve afbeelding $\phi$ van $\mathscr{W}_X$ naar $\mathscr{W}_Y$ bestaat met inverse $\psi := \phi^{-1}$, zo dat $Y = \phi(X)$ en dus $X = \psi(Y)$. Dan geldt:

$$f_Y(y) = f_X(\phi^{-1}(y)) = f_X(\psi(y)) \text{ voor alle } y \in \mathscr{W}_Y.$$

*Bewijs.* Aangezien $\phi$ bijectief is, geldt dat

$$Y = y \Leftrightarrow \phi^{-1}(Y) = \phi^{-1}(y) \Leftrightarrow X = \phi^{-1}(y) \Leftrightarrow X = \psi(y)$$

en dus geldt voor alle $y$ in $\mathscr{W}_Y$ dat:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= P_Y(\{y\}) = P(Y = y) \\ &= P(X = \phi^{-1}(y)) = P_X(\{\phi^{-1}(y)\}) \\ &= f_X(\phi^{-1}(y)) = f_X(\psi(y)). \end{aligned}$$

□

## Discrete toevallige veranderlijken: voorbeeld

3.72 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

Beschouw een binomiaal verdeelde toevallige veranderlijke $X$ met $\mathscr{W}_X = \{0,1,2,3,\dots,n\}$ en massafunctie

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x \in \{0,1,2,3,\dots,n\}$$

Voor de toevallige veranderlijke $Y = X^2$ vinden we dan dat $\mathscr{W}_Y = \{0,1,4,9,\dots,n^2\}$ en

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) = \binom{n}{\sqrt{y}} p^{\sqrt{y}} q^{n-\sqrt{y}}, \quad y \in \{0,1,4,9,\dots,n^2\}$$

3.73 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

## Discrete toevallige veranderlijken

**Stelling 3.16**
Beschouw twee discrete tweedimensionale toevallige veranderlijken $(X_1,X_2)$ en $(Y_1,Y_2)$, en neem aan dat er een bijectieve vectoriële afbeelding $\phi$ van $\mathscr{W}_{(X_1,X_2)}$ naar $\mathscr{W}_{(Y_1,Y_2)}$ bestaat, zo dat

$$Y_1 = \phi_1(X_1,X_2) \text{ en } Y_2 = \phi_2(X_1,X_2).$$

Dit betekent dat er ook een bijectieve vectoriële afbeelding $\psi = \phi^{-1}$ van $\mathscr{W}_{(Y_1,Y_2)}$ naar $\mathscr{W}_{(X_1,X_2)}$ bestaat, zo dat

$$X_1 = \psi_1(Y_1,Y_2) \text{ en } X_2 = \psi_2(Y_1,Y_2).$$

Dan geldt:

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = f_{(X_1,X_2)}(\psi_1(y_1,y_2),\psi_2(y_1,y_2)), \quad (y_1,y_2) \in \mathscr{W}_{(Y_1,Y_2)}.$$

3.74 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

*Bewijs.* Aangezien $\phi$ bijectief is, geldt dat

$$\begin{aligned} (Y_1,Y_2) = (y_1,y_2) &\Leftrightarrow \phi^{-1}(Y_1,Y_2) = \phi^{-1}(y_1,y_2) \\ &\Leftrightarrow (X_1,X_2) = \psi(y_1,y_2) = (\psi_1(y_1,y_2),\psi_2(y_1,y_2)). \end{aligned}$$

en dus geldt voor alle $(y_1,y_2)$ in $\mathscr{W}_{(Y_1,Y_2)}$ dat:

$$\begin{aligned} f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) &= P_{(Y_1,Y_2)}(\{(y_1,y_2)\}) \\ &= P(Y_1 = y_1 \text{ en } Y_2 = y_2) \\ &= P(X_1 = \psi_1(y_1,y_2) \text{ en } X_2 = \psi_2(y_1,y_2)) \\ &= P_{(X_1,X_2)}(\{(\psi_1(y_1,y_2),\psi_2(y_1,y_2))\}) \\ &= f_{(X_1,X_2)}(\psi_1(y_1,y_2),\psi_2(y_1,y_2)). \end{aligned}$$

□

## Continue veranderlijken

3.75 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

**Stelling 3.17**
Beschouw twee continue toevallige veranderlijken $X$ en $Y$, en neem aan dat er een bijectieve afbeelding $\phi$ met afleidbare inverse $\psi := \phi^{-1}$ tussen $X$ en $Y$ bestaat, zo dat $Y = \phi(X) \Leftrightarrow X = \psi(Y)$. Dan geldt voor alle $y \in \mathbb{R}$ dat:

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))|J(y)|,$$

waarin $J$ de Jacobiaan is van de transformatie $\psi$, gegeven door

$$J(y) := D\psi(y) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y}(y).$$

3.76 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

*Informeel bewijs.* We geven het bewijs ter illustratie in het geval dat $\phi$ (en dus ook $\psi$) strikt dalend is. Dan geldt voor alle $a < b$ in $\mathbb{R}$ dat

$$a \leq Y \leq b \Leftrightarrow \psi(b) \leq \psi(Y) \leq \psi(a) \Leftrightarrow \psi(b) \leq X \leq \psi(a)$$

en dus dat, na transformatie van veranderlijken:

$$\begin{aligned} P_Y([a,b]) = P_X([\psi(b), \psi(a)]) &= \int_{\psi(b)}^{\psi(a)} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_b^a f_X(\psi(y)) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y = -\int_a^b f_X(\psi(y)) \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b f_X(\psi(y))|J(y)|\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Dit betekent dat $Y$ een continue toevallige veranderlijke is met densiteit $f_Y$ gegeven door $f_Y(y) = f_X(\psi(y))|J(y)|$. □

## Continue veranderlijken: voorbeeld

3.77 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

Beschouw de continue toevallige veranderlijke $X$ met densiteit

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

met $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$.
We zijn geïnteresseerd in de densiteit $f_Y$ van de continue toevallige veranderlijke $Y$ gegeven door:

$$Y = \phi(X) = \frac{X-\mu}{\sigma} \text{ en dus } X = \psi(Y) = \mu + \sigma Y \text{ zodat } J(y) = D\psi(y) = \sigma.$$

We vinden dat:

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))|J(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

## Belangrijke opmerking

3.78 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

Wanneer het verband tussen $X$ en $Y$ *niet bijectief* is, zijn de gegeven transformatieformules niet langer zonder meer geldig, en moet geval per geval worden bekeken.

Neem bij wijze van voorbeeld aan dat $X$ uniform verdeeld is over $[-1,1]$, en dat $Y = \phi(X) = X^2$, dan is het verband tussen $X$ en $Y$ niet langer bijectief. Met een $y \in [0,1]$ komen dan *twee elkaar uitsluitende mogelijkheden* voor $X$ overeen, namelijk $-\sqrt{y}$ en $\sqrt{y}$. Met een Jacobiaan gegeven door $J(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, levert de somwet dan:

$$f_Y(y) = f_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y \in (0,1].$$

## Continue veranderlijken

3.79 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

**Stelling 3.18 [zonder bewijs]**
Beschouw twee continue tweedimensionale toevallige veranderlijken $(X_1,X_2)$ en $(Y_1,Y_2)$, en neem aan dat er een bijectief vectorieel verband $\phi$ tussen $(X_1,X_2)$ en $(Y_1,Y_2)$ bestaat, zo dat

$$Y_1 = \phi_1(X_1,X_2) \text{ en } Y_2 = \phi_2(X_1,X_2).$$

Dit betekent dat er ook een bijectief vectorieel verband $\psi = \phi^{-1}$ tussen $(Y_1,Y_2)$ en $(X_1,X_2)$ bestaat, zo dat

$$X_1 = \psi_1(Y_1,Y_2) \text{ en } X_2 = \psi_2(Y_1,Y_2).$$

Dan geldt, wanneer $\psi$ afleidbaar wordt verondersteld, dat:

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = f_{(X_1,X_2)}(\psi_1(y_1,y_2),\psi_2(y_1,y_2))|J(y_1,y_2)|,$$

waarin $J$ de Jacobiaan is van de transformatie $\psi$, gegeven door

$$J(y_1,y_2) := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(y_1,y_2) & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2}(y_1,y_2) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}(y_1,y_2) & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}(y_1,y_2) \end{bmatrix}.$$

## Verdere details

3.80 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

Zelfstudie.

## Toepassing: affiene transformaties en onafhankelijkheid

3.81 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

**Stelling 3.19**
Zijn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onafhankelijke toevallige veranderlijken. Beschouw de toevallige veranderlijken $Y_k$ gegeven door

$$Y_k = a_k X_k + b_k$$

met $a_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ en $b_k \in \mathbb{R}$. Dan zijn $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ook onafhankelijk.

*Bewijs.* We geven ter illustratie het bewijs voor continue veranderlijken en $n = 2$, de andere gevallen worden analoog bewezen. Uit stelling 3.18 volgt dat

$$\begin{aligned} f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) &= f_{(X_1,X_2)}\left(\frac{y_1-b_1}{a_1},\frac{y_2-b_2}{a_2}\right)\left|\begin{vmatrix} 1/a_1 & 0 \\ 0 & 1/a_2 \end{vmatrix}\right| \\ &= f_{X_1}\left(\frac{y_1-b_1}{a_1}\right)\left|\frac{1}{a_1}\right| f_{X_2}\left(\frac{y_2-b_2}{a_2}\right)\left|\frac{1}{a_2}\right| && \text{(stelling 3.14)} \\ &= f_{Y_1}(y_1)\, f_{Y_2}(y_2) && \text{(stelling 3.17)} \end{aligned}$$

en dus volgt uit stelling 3.14 dat $Y_1$ en $Y_2$ onafhankelijk zijn. □

## Veralgemening: bijectieve transformaties en onafhankelijkheid

3.82 Transformaties van toevallige veranderlijken [DG:3.8–3.9]

**Stelling 3.20**
Zijn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onafhankelijke toevallige veranderlijken. Beschouw de toevallige veranderlijken $Y_k$ gegeven door

$$Y_k = \phi_k(X_k)$$

met $\phi_k$ een bijectieve, en dus inverteerbare, afbeelding met inverse $\psi_k := \phi_k^{-1}$. Dan zijn $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ook onafhankelijk.

*Bewijs.* Ter illustratie: voor continue veranderlijken en $n = 2$, andere gevallen analoog. Uit stelling 3.18 volgt dat

$$\begin{aligned} f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) &= f_{(X_1,X_2)}(\psi_1(y_1),\psi_2(y_2))\left|\det\begin{bmatrix} D\psi_1(y_1) & 0 \\ 0 & D\psi_2(y_2) \end{bmatrix}\right| \\ &= f_{X_1}(\psi_1(y_1))|D\psi_1(y_1)|\, f_{X_2}(\psi_2(y_2))|D\psi_2(y_2)| && \text{(stelling 3.14)} \\ &= f_{Y_1}(y_1)\, f_{Y_2}(y_2) && \text{(stelling 3.17)} \end{aligned}$$

en dus volgt uit stelling 3.14 dat $Y_1$ en $Y_2$ onafhankelijk zijn. □

# 15 Addendum ter informatie: De Monty Hall-puzzel

## De Monty Hall-puzzel

In de Monty Hall-televisieshow wordt een spel gespeeld met drie deuren. Achter een van de deuren bevindt zich een auto, en achter elk van de andere twee staat een geit verborgen. De speler duidt een van deze drie deuren aan. Gastheer Monty opent een andere deur, met een geit erachter. En dan mag jij een van de twee ongeopende deuren openen, waarbij je wint wat erachter staat. Welke deur kies je het beste: die die je het eerst koos, of de overblijvende? Dus: blijf je bij je eerste keuze, of verander je?

Je hebt nu voldoende kennis om het antwoord op deze vraag te vinden. Probeer het, en kom dan terug naar het volgende gedetailleerde antwoord.

## Antwoord

Jij, de speler, moet een zo goed mogelijke beslissing nemen en wordt daarbij geconfronteerd met een gebrek aan kennis, en dus met onzekerheid. Men pakt zulke beslissingsproblemen onder onzekerheid het beste aan met technieken uit de waarschijnlijkheidsleer.

Het Monty Hall-probleem is een van die vragen waarop de regels van de waarschijnlijkheidsleer een antwoord geven dat schijnbaar tegen de intuïtie indruist. Men gaat er vaak van uit dat het er niet toe doet dat Monty een deur opent, of nog, dat dit openen van een deur geen nuttige informatie aanbrengt. Daarom wordt het probleem soms ook als een paradox gezien. We zullen zien dat deze intuïtieve redenering verkeerd is.

Nummer de deuren van 1 tot 3. We zullen voor het gemak aannemen dat jij deur 1 aangewezen hebt. We noemen $X$ de deur waarachter de auto verborgen is. Je kent $X$ niet, maar de mogelijke waarden zijn 1, 2, en 3. Vooraleer Monty een deur heeft geopend, heeft elk van deze mogelijkheden voor jou dezelfde waarschijnlijkheid:

$$P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = \frac{1}{3}.$$

We willen weten wat deze waarschijnlijkheden worden nadat Monty een deur heeft geopend. Hiervoor zullen we de regel van Bayes gebruiken.

We stellen de deur die Monty opent door $O$ voor. De mogelijke waarden voor $O$ zijn natuurlijk 2 en 3, want Monty moet een andere deur openen dan de deur 1 die jij hebt aangewezen.

Welke deur $O$ Monty kiest, hang natuurlijk af van achter welke deur $X$ de auto verborgen zit.

Wanneer $X = 2$, dan kan Monty alleen nog deur 3 openen, want dat is de enige resterende deur waarachter een geit verborgen zit. We kunnen dit met voorwaardelijke waarschijnlijkheden schrijven als:

$$P(O=2|X=2) = 0 \text{ en } P(O=3|X=2) = 1.$$

Hierin stelt $P(O=o|X=x) = p(o|x)$ de waarschijnlijkheid voor dat Monty deur $o$ opent, wanneer de auto achter deur $x$ staat.

Een analoge redenering gaat op wanneer $X = 3$, want dan kan Monty alleen nog deur 2 openen:

$$P(O=2|X=3) = 1 \text{ en } P(O=3|X=3) = 0.$$

En wanneer $X = 1$, staat er een geit achter deur 2 en een achter deur 3, en dus heeft Monty de keuze tussen $O = 2$ en $O = 3$. Hier vinden we de belangrijkste bron van verwarring in het Monty Hall-probleem, die vaak over het hoofd wordt gezien: de beschrijving van het probleem is onvolledig omdat nergens wordt verteld hoe Monty de keuze maakt tussen deze twee opties. En dat is nochtans informatie die jij, de speler, nodig hebt om het probleem eenduidig op te lossen.

### Een eerste mogelijkheid

Het is bijvoorbeeld mogelijk dat Monty het toeval laat bepalen of hij in dat geval ($X = 1$) kiest voor deur 2 of deur 3, bijvoorbeeld door een muntstuk op te gooien. In dat geval hebben we meteen

$$P(O=2|X=1) = \frac{1}{2} \text{ en } P(O=3|X=1) = \frac{1}{2}.$$

Met de Stelling van Bayes kunnen we nu de gezochte waarschijnlijkheden vinden: $P(X=x|O=o)$ is de waarschijnlijkheid dat de auto achter deur $x$ staat, wanneer jij ziet dat Monty deur $o$ opent. De formules hiervoor zijn (regel van Bayes):

$$P(X=x|O=o) = \frac{P(X=x)P(O=o|X=x)}{P(O=o)},$$

met (wet van totale waarschijnlijkheid)

$$P(O=o)=P(O=o|X=1)P(X=1)+P(O=o|X=2)P(X=2)+P(O=o|X=3)P(X=3).$$

Vullen we alle bekende gegevens in deze formules in, dan vinden we bijvoorbeeld:

$$P(X=1|O=2)=\frac{1}{3} \text{ en } P(X=3|O=2)=\frac{2}{3},$$

en analoog

$$p(X=1|O=3)=\frac{1}{3} \text{ en } p(X=3|O=1)=\frac{2}{3}.$$

Het wordt dus twee keer waarschijnlijker dat de auto niet eerder dan wel achter deur 1 staat, zodat, welke deur Monty ook kiest, je het beste van deur verandert.

Je kunt dit ook min of meer intuïtief inzien zonder de berekeningen uit te voeren. Neem bijvoorbeeld aan dat Monty kiest voor deur 2. Die keuze heeft twee mogelijke verklaringen (‘oorzaken’). De eerste is dat de auto achter deur 3 staat, zodat Monty geen andere keuze heeft. De tweede is dat de auto achter deur 1 staat, en dan is Monty’s keuze het resultaat van tossen geweest. De sterkste verklaring is degene die Monty’s keuze het meest waarschijnlijk maakt, namelijk dat de auto achter deur 3 staat.

### Een andere mogelijkheid

Maar het is best mogelijk dat Monty andere manieren heeft om de keuze tussen deur 2 en deur 3 te maken. Stel dat jij bijvoorbeeld zou weten dat Monty in het geval dat $X=1$ steevast deur 2 zal kiezen:

$$P(O=2|X=1)=1 \text{ en } P(O=3|X=1)=0.$$

Wanneer Monty dan bijvoorbeeld kiest voor deur 3, dan weet je met zekerheid dat de auto niet achter deur 1, en evenmin achter deur 3 kan staan. Je weet dan zeker dat je voor deur 2 moet kiezen.

Wanneer hij echter voor deur 2 kiest, dan leert de Stelling van Bayes ons dat (probeer ook hiervoor een intuïtieve verklaring te geven):

$$P(X=1|O=2)=\frac{1}{2} \text{ en } P(X=3|O=2)=\frac{1}{2},$$

en in dit geval maakt het niet uit of we van deur veranderen of niet: beide mogelijkheden zijn nu even waarschijnlijk geworden.

### Samengevat

Als je eenmaal weet op welke manier Monty een keuze zal maken tussen de deuren die hij kan openen, dan kun je die informatie gebruiken om iets meer te weten te komen over waar de auto staat.

De grote moeilijkheid bij de Monty Hall-puzzel is echter dat hierover niks wordt gezegd: het probleem is onvoldoende duidelijk omschreven, en het heeft daarom geen eenduidige oplossing. Wellicht is het deze mogelijkheid tot verwarring die van de puzzel een paradox heeft gemaakt. Maar zodra we vastleggen hoe Monty z’n keuze maakt, verdwijnt de paradox, en zijn de conclusies die de waarschijnlijkheidsleer ons aanreikt ook intuïtief aanvaardbaar.

## Een verwant probleem

Als je deze redenering hebt begrepen, dan kun je meteen je tanden zetten in een andere, zeer gelijkaardige, puzzel uit de waarschijnlijkheidsleer: het probleem van de drie gevangenen.

Van drie terdoodveroordeelden $a$, $b$, en $c$ krijgt er een gratie, en zullen de anderen worden terechtgesteld. Wie gratie krijgt, is door het toeval bepaald, waarbij elke veroordeelde gelijke kansen had. Alles wat een cipier aan veroordeelde $a$ wil vertellen is de naam van een van de andere twee gevangenen, waarbij hij zegt dat die zal worden terechtgesteld. Geeft dit aan gevangene $a$ meer informatie over of hem gratie zal worden verleend?

# 16 Addendum ter informatie: De stelling van Cantor

## De stelling van Cantor (1892)

We nemen een willekeurige verzameling $S$ in gedachten, en we kijken ook naar haar zogenaamde machtverzameling $\mathscr{P}(S)$: de verzameling van alle deelverzamelingen van $S$.

Wanneer $S$ eindig is, en $n$ elementen heeft, dan is ook $\mathscr{P}(S)$ eindig, en heeft $2^n$ elementen. Aangezien $n < 2^n$ voor alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, zien we dat elke eindige verzameling strikt minder elementen heeft dan deelverzamelingen.

Maar wat wanneer $S$ willekeurig — en dus niet noodzakelijk eindig — is? De volgende eenvoudige redenering toont al aan dat elke $S$ nooit strikt meer elementen kan hebben dan deelverzamelingen: met elk element $x$ van $S$ komt een deelverzameling $\{x\}$ van $S$ overeen, zodat $S$ ten hoogste evenveel elementen als deelverzamelingen kan hebben.

Georg Cantor bewees in 1892 de volgende beroemde stelling: een willekeurige verzameling $S$ heeft strikt minder elementen dan deelverzamelingen. Aangezien men een reëel getal kan identificeren met een deelverzameling van de natuurlijke getallen — bijvoorbeeld bepaald door zijn decimale expansie — heeft de stelling van Cantor als gevolg dat er strikt minder natuurlijke dan reële getallen zijn. Dat impliceert dat de oneindigheid van $\mathbb{N}$ van een andere aard is dan die van $\mathbb{R}$: de eerste wordt aftelbaar, de tweede overaftelbaar genoemd.

Cantor gaf voor zijn stelling het volgende ingenieuze bewijs, dat algemener kan worden gebruikt, en een diagonaalargument wordt genoemd — Kurt Gödel en Alan Turing gebruikten later analoge redeneringen om hun beroemde *onvolledigheidsresultaten* te bewijzen.

We weten al dat het mogelijk is met elke $x$ in $S$ een verschillend deel $S_x$ van $S$ te laten overeenkomen, kies bijvoorbeeld $S_x := \{x\}$. We weten dus al dat er ten minste één injectie is van $S$ naar $\mathscr{P}(S)$. Noem $\phi : S \to \mathscr{P}(S)$ een willekeurige injectie, wat dus betekent dat de afbeelding $\phi$ voldoet aan

$$(\forall x, y \in S)(x \neq y \Rightarrow \phi(x) \neq \phi(y)).$$

Het volstaat nu aan te tonen dat zo'n injectie $\phi$ nooit een bijectie kan zijn, en dus nooit surjectief kan zijn: er zijn deelverzamelingen van $S$ die niet door $\phi$ bereikt worden. Een zulke deelverzameling is de zogenoemde *niet-diagonaalverzameling*:

$$S_{\mathrm{nd}} := \{x \in S : x \notin \phi(x)\}. \tag{5}$$

Inderdaad, zou $S_{\mathrm{nd}}$ door $\phi$ bereikt worden, dan betekent dit dat er een $y \in S$ zou zijn waarvoor $\phi(y) = S_{\mathrm{nd}}$. Nu zijn er voor die $y$ twee mogelijkheden. Ofwel geldt dat $y \in \phi(y)$, zodat uit (5) volgt dat $y \notin S_{\mathrm{nd}}$, en dus $y \notin \phi(y)$, een contradictie. Ofwel geldt dat $y \notin \phi(y)$, zodat uit (5) volgt dat $y \in S_{\mathrm{nd}}$, en dus $y \in \phi(y)$, ook een contradictie. De veronderstelling dat $S_{\mathrm{nd}}$ door $\phi$ bereikt wordt, leidt dus in alle gevallen tot een contradictie, en is daarom niet waar.

Er is dus geen bijectie tussen $S$ en $\mathscr{P}(S)$, zodat $S$ en $\mathscr{P}(S)$ nooit evenveel elementen kunnen hebben.