

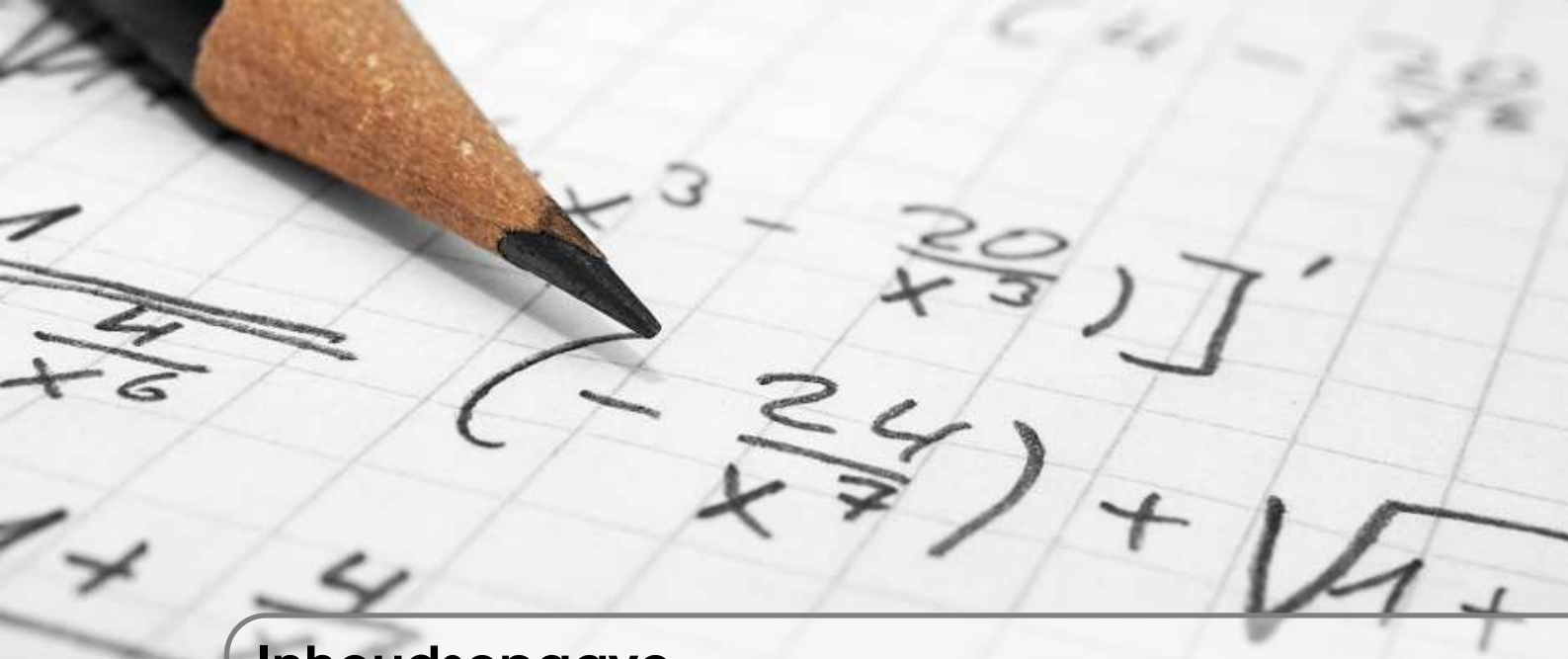
# Wiskunde 1

Industriële Wetenschappen  
eerste bachelor

Prof. T. Van Hecke

Copyright © 2018 Tanja Van Hecke

Niets in deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, ... of op welke andere wijze ook, zonder voorafgaande toestemming van de auteur.



## Inhoudsopgave

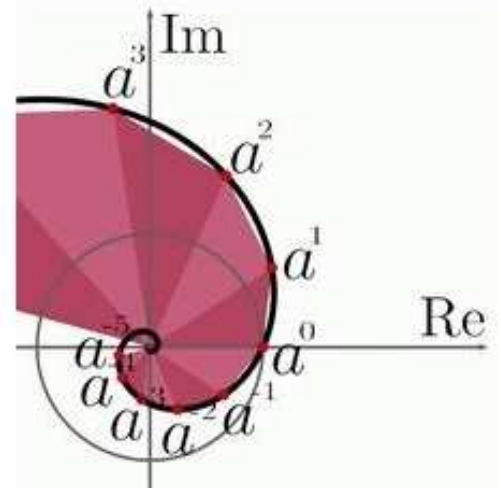
<b>1</b>	<b>Complexe getallen</b>	<b>3</b>
1.1	Definitie	3
1.2	Andere voorstellingen	3
1.3	Bewerkingen met complexe getallen	5
1.3.1	Optellen en aftrekken	5
1.3.2	Vermenigvuldigen en delen	5
1.3.3	De rotatieformules	6
1.3.4	Machtsverheffing	6
1.3.5	$n$ de machtswortels	6
1.4	Complexe nulpunten van veeltermen in $\mathbb{C}$	7
1.5	Superpositie van signalen of golven als ingenieurstoepassing	8
<b>2</b>	<b>Vectoren</b>	<b>9</b>
2.1	Basis	9
2.2	Rekenen met vectoren	10
2.2.1	De translatieformules	11
2.3	Scalair product	11
2.3.1	Hoek tussen 2 vectoren	12
2.3.2	Loodrechte projectie van een vector op een richting	13
2.3.3	Toepassingen	13
2.4	Vectorieel product	14
2.4.1	Toepassing	15
2.5	Gemengd product van 3 vectoren	15
<b>3</b>	<b>Tweedegraadskrommen en -oppervlakken</b>	<b>17</b>
3.1	Inleiding	17

<b>3.2</b>	<b>Definitie en overzicht van de tweedegraadskrommen in het vlak</b>	<b>18</b>
3.2.1	De cirkel . . . . .	18
3.2.2	De ellips . . . . .	18
3.2.3	De hyperbool . . . . .	19
3.2.4	De parabool . . . . .	20
<b>3.3</b>	<b>Toepassingen</b>	<b>21</b>
<b>3.4</b>	<b>Classificatie van tweedegraadsoppervlakken in de ruimte</b>	<b>21</b>
3.4.1	De ellipsoïde . . . . .	22
3.4.2	De hyperboloïde . . . . .	22
3.4.3	De paraboloides . . . . .	23
3.4.4	De kegel . . . . .	23
3.4.5	Het cilinderoppervlak . . . . .	24
3.4.6	Ontaarde gevallen . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Functies</b>	<b>25</b>
<b>4.1</b>	<b>Definities</b>	<b>25</b>
<b>4.2</b>	<b>Voorstellingsvormen van een kromme</b>	<b>26</b>
<b>4.3</b>	<b>Cyclometrische functies</b>	<b>27</b>
<b>4.4</b>	<b>Exponentiële functies</b>	<b>27</b>
<b>4.5</b>	<b>Logaritmische functies</b>	<b>28</b>
<b>4.6</b>	<b>Hyperbolische functies</b>	<b>30</b>
<b>4.7</b>	<b>Areaalfuncties</b>	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>Continuïteit, limieten</b>	<b>33</b>
<b>5.1</b>	<b>Continuïteit</b>	<b>33</b>
<b>5.2</b>	<b>Limieten</b>	<b>34</b>
5.2.1	Oneigenlijke limieten . . . . .	35
5.2.2	Rekenen met limieten . . . . .	35
5.2.3	Het getal $e$ . . . . .	35
<b>5.3</b>	<b>Limieten van rationale en irrationale functies</b>	<b>36</b>
5.3.1	Veeltermfuncties . . . . .	36
5.3.2	Rationale functies . . . . .	36
5.3.3	Irrationale functies . . . . .	37
<b>5.4</b>	<b>Limieten van goniometrische functies</b>	<b>37</b>
<b>5.5</b>	<b>Limieten van veralgemeende machtsfuncties</b>	<b>38</b>
<b>6</b>	<b>Afgeleiden</b>	<b>39</b>
<b>6.1</b>	<b>Definities</b>	<b>39</b>
<b>6.2</b>	<b>Stellingen</b>	<b>40</b>
<b>6.3</b>	<b>Berekenen van afgeleiden</b>	<b>42</b>
6.3.1	Rekenregels . . . . .	42
6.3.2	Afgeleide van elementaire functies . . . . .	42
<b>6.4</b>	<b>Hogere orde afgeleiden</b>	<b>43</b>
<b>6.5</b>	<b>Differentiaal van een functie van één veranderlijke</b>	<b>43</b>
6.5.1	Differentiaal van de eerste orde . . . . .	43
6.5.2	Differentialen van hogere orden . . . . .	44

<b>6.6</b>	<b>Bijzondere technieken</b>	<b>44</b>
6.6.1	Impliciet afleiden . . . . .	44
6.6.2	Logaritmisch afleiden . . . . .	45
<b>6.7</b>	<b>Regel van de l'Hôpital voor het berekenen van limieten</b>	<b>45</b>
<b>6.8</b>	<b>Raaklijn en normaal in een punt van een kromme</b>	<b>46</b>
<b>6.9</b>	<b>Hoek tussen twee krommen</b>	<b>46</b>
<b>6.10</b>	<b>Praktische toepassingen van de afgeleiden en differentialen</b>	<b>47</b>
6.10.1	Afgeleide als maat voor de aangroei van het beeld . . . . .	47
6.10.2	Foutentheorie . . . . .	48
<b>6.11</b>	<b>Stijgen, dalen, extrema, concaaf, convex en buigpunten</b>	<b>48</b>
6.11.1	Stijgen, dalen . . . . .	48
6.11.2	Extrema . . . . .	48
6.11.3	Convex, concaaf en buigpunten . . . . .	49
6.11.4	Extremumvraagstukken . . . . .	50
<b>6.12</b>	<b>Kromming, kromtestraal, kromtecirkel, evolute</b>	<b>51</b>
6.12.1	Formules . . . . .	51
6.12.2	Kromtemiddelpunt, kromtecirkel . . . . .	52
6.12.3	Evolute . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Functieonderzoek van <math>y = f(x)</math></b>	<b>55</b>
<b>7.1</b>	<b>Asymptoten</b>	<b>55</b>
<b>7.2</b>	<b>Overzicht functieonderzoek</b>	<b>56</b>
<b>8</b>	<b>Poolcoördinaten</b>	<b>59</b>
<b>8.1</b>	<b>Definitie</b>	<b>59</b>
<b>8.2</b>	<b>De rechte in poolcoördinaten</b>	<b>60</b>
<b>8.3</b>	<b>De cirkel in poolcoördinaten</b>	<b>61</b>
<b>8.4</b>	<b>Hoek tussen raaklijn en voerstraal</b>	<b>61</b>
<b>8.5</b>	<b>Raaklijn in de pool</b>	<b>61</b>
<b>8.6</b>	<b>Hoek tussen twee krommen</b>	<b>62</b>
<b>8.7</b>	<b>Stijgen, dalen, extrema</b>	<b>62</b>
<b>8.8</b>	<b>Buigpunten</b>	<b>63</b>
<b>8.9</b>	<b>Asymptoten</b>	<b>64</b>
<b>8.10</b>	<b>Verloop van kromme <math>r = f(\theta)</math></b>	<b>64</b>
<b>8.11</b>	<b>De cardioïde</b>	<b>66</b>
<b>9</b>	<b>Parameterkrommen</b>	<b>67</b>
<b>9.1</b>	<b>Afgeleide bij parameterkrommen</b>	<b>67</b>
<b>9.2</b>	<b>Asymptoten</b>	<b>68</b>
<b>9.3</b>	<b>Overzicht verloop parameterkromme</b>	<b>68</b>
<b>9.4</b>	<b>Enkele bijzondere krommen</b>	<b>71</b>
9.4.1	De cycloïde . . . . .	71
9.4.2	De epicycloïde . . . . .	72
9.4.3	De hypocycloïde . . . . .	72

13.11	Bepaalde integralen	134
<b>10</b>	<b>Onbepaalde integraal</b>	<b>75</b>
<b>10.1</b>	<b>Definities</b>	<b>75</b>
<b>10.2</b>	<b>Rekenregels</b>	<b>75</b>
<b>10.3</b>	<b>Standaardintegralen</b>	<b>76</b>
<b>10.4</b>	<b>Algemene oplossingsmethodes</b>	<b>77</b>
10.4.1	Substitutiemethode	77
10.4.2	Partiële integratie	77
<b>10.5</b>	<b>Integralen van enkele rationale en irrationale functies</b>	<b>77</b>
10.5.1	Opstellen van recursieformule	79
<b>10.6</b>	<b>Integralen van goniometrische functies</b>	<b>80</b>
<b>10.7</b>	<b>Goniometrische, hyperbolische substituties voor</b>	
	$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ met $R$ een rationale functie	<b>81</b>
<b>11</b>	<b>Bepaalde integralen</b>	<b>83</b>
<b>11.1</b>	<b>Definitie</b>	<b>83</b>
11.1.1	De Riemann-integraal	83
11.1.2	Verband tussen de Riemann-integraal en de onbepaalde integraal voor een positieve continue functie	84
<b>11.2</b>	<b>Oneigenlijke integralen</b>	<b>85</b>
11.2.1	Berekenen van oneigenlijke integralen	85
<b>11.3</b>	<b>Oppervlakte van een vlak gebied</b>	<b>86</b>
11.3.1	Gebied ingesloten door $y = f(x)$ , $X$ -as, $a \leq x \leq b$	86
11.3.2	Willekeurig gebied	87
<b>11.4</b>	<b>Booglengte van een vlakke kromme</b>	<b>90</b>
11.4.1	Cartesisch	90
11.4.2	Poolcoördinaten	91
<b>11.5</b>	<b>Volume van omwentelingslichamen</b>	<b>92</b>
11.5.1	Cartesisch	92
11.5.2	Poolcoördinaten	93
<b>11.6</b>	<b>Zijdelingse oppervlakte van omwentelingslichamen</b>	<b>95</b>
<b>11.7</b>	<b>Traagheidsmoment, statisch moment en zwaartepunt</b>	<b>95</b>
11.7.1	Traagheidsmoment en statisch moment van een homogene boog	95
11.7.2	Zwaartepunt van een homogene boog	96
11.7.3	Stellingen van Guldin	97
<b>12</b>	<b>Oefeningen</b>	<b>99</b>
<b>12.1</b>	<b>Complexe getallen</b>	<b>99</b>
<b>12.2</b>	<b>Vectoren</b>	<b>101</b>
<b>12.3</b>	<b>Tweedegraadskrommen en -oppervlakken</b>	<b>102</b>
<b>12.4</b>	<b>Functies</b>	<b>103</b>
<b>12.5</b>	<b>Continuïteit, limieten</b>	<b>105</b>
<b>12.6</b>	<b>Afgeleiden</b>	<b>106</b>
12.6.1	Berekenen van afgeleiden	106
12.6.2	De regel van de l'Hôpital	106
12.6.3	Toepassingen van afgeleiden	107

13.11 Bepaalde integralen	135
12.6.4 Extrema en buigpunten	108
12.6.5 Kromming, kromtestraal, kromtecirkel	109
<b>12.7 Functieonderzoek van <math>y = f(x)</math></b>	<b>110</b>
<b>12.8 Poolcoördinaten</b>	<b>111</b>
<b>12.9 Parameterkrommen</b>	<b>112</b>
<b>12.10 Onbepaalde integralen</b>	<b>113</b>
<b>12.11 Bepaalde integralen</b>	<b>116</b>
<b>13 Antwoorden</b>	<b>119</b>
<b>13.1 Complexe getallen</b>	<b>119</b>
<b>13.2 Vectoren</b>	<b>120</b>
<b>13.3 Tweedegraadskrommen en -oppervlakken</b>	<b>120</b>
<b>13.4 Functies</b>	<b>121</b>
<b>13.5 Continuïteit, limieten</b>	<b>122</b>
<b>13.6 Afgeleiden</b>	<b>122</b>
13.6.1 Berekenen van afgeleiden	122
13.6.2 Regel van de l'Hôpital	122
13.6.3 Toepassingen van afgeleiden	122
13.6.4 Extrema en buigpunten	123
13.6.5 Kromming, kromtestraal, kromtecirkel	124
<b>13.7 Functieonderzoek</b>	<b>124</b>
<b>13.8 Poolcoördinaten</b>	<b>124</b>
<b>13.9 Parameterkrommen</b>	<b>125</b>
<b>13.10 Onbepaalde integralen</b>	<b>126</b>
<b>13.11 Bepaalde integralen</b>	<b>130</b>



# 1. Complexe getallen

## 1.1 Definitie

Een complex getal is een getal van de vorm:

$$z = a + bj \quad \text{met} \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \quad \text{en} \quad j^2 = -1$$

Het getal  $a$  noemen we het **reëel** deel  $Re(z)$  en  $b$  het **imaginair** deel  $Im(z)$ . De verzameling van alle complexe getallen noemen we  $\mathbb{C}$ . Het symbool  $j$  noemen we de **imaginaire eenheid**.

**Gelijkheid:**  $a + bj = c + dj \Leftrightarrow a = c \quad \text{en} \quad b = d$

**Som:**  $(a + bj) + (c + dj) = a + c + (b + d)j$

**Product:**  $(a + bj) \cdot (c + dj) = ac - bd + (ad + bc)j$

Het **complex toegevoegde**  $\bar{z}$  (of  $z^*$ ) van  $z = a + bj$  is het complex getal  $\bar{z} = a - bj$ .

**Eigenschap 1.1.1**  $z \cdot \bar{z} = (a + bj) \cdot (a - bj) = a^2 + b^2$  ;  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$  ;  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

## 1.2 Andere voorstellingen

**Definitie 1.2.1** (Cartesische vorm). *Met elk complex getal  $z = a + bj$  correspondeert een koppel cartesische coördinaten  $(a, b)$  van het vlak. Daarom noemen we  $a + bj$  de **cartesische vorm** van het complex getal.*

Voor de bewerkingen in cartesische vorm, het bepalen van vierkantswortels en het oplossen van een tweedegraadsvergelijking verwijzen we naar de cursus basiskennis.

**Definitie 1.2.2** (Goniometrische vorm). *Zijn  $(r, \vartheta)$  de poolcoördinaten van het punt  $(a, b)$  dan is de goniometrische vorm van  $z = a + bj$  gelijk aan*

$$z = r(\cos \vartheta + j \sin \vartheta)$$



De afstand  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$  van het punt  $p$  tot de oorsprong noemt men de **modulus** van  $z$  en de hoek tussen de voerstraal en de poolas  $\vartheta$  noemt men het **argument** van  $z$  ( $\arg z$ ).

### Eigenschap 1.2.1

$$|z| = |\bar{z}| \quad ; \quad z\bar{z} = |z|^2 \quad ; \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad ; \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

**Definitie 1.2.3** (Exponentiële vorm). *De exponentiële vorm van  $z = r(\cos \vartheta + j \sin \vartheta)$  wordt gedefinieerd als  $z = r e^{j\vartheta}$ .*

Dit is gebaseerd op de **formule van Euler**:

$$\cos \vartheta + j \sin \vartheta = e^{j\vartheta}$$

die kan geverifieerd worden door middel van de McLaurin-ontwikkelingen van de functies  $\cos x$ ,  $\sin x$  en  $e^x$ .

De exponentiële vorm verschilt niet veel van de goniometrische vorm aangezien  $r$  en  $\vartheta$  dezelfde betekenis hebben als bij de goniometrische vorm.

! Uit  $e^{j\pi} = \cos \pi + j \sin \pi = -1$  volgt

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

Dit is één van de mooiste gelijkheden (gevonden door Euler) binnen de wiskunde omdat ze de twee belangrijkste transcendente getallen  $e$  en  $\pi$ , de imaginaire eenheid  $j$  en de twee belangrijkste natuurlijke getallen 0 en 1 (de neutrale elementen t.o.v. resp. de optelling en de vermenigvuldiging) op een verrassende manier met elkaar verbindt.

! De formule laat toe de sinus en cosinus uit te drukken in functie van  $e^{j\vartheta}$  en  $e^{-j\vartheta}$ :

$$\cos \vartheta = \frac{1}{2}(e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}) \quad \text{en} \quad \sin \vartheta = \frac{1}{2j}(e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}) = \frac{j}{2}(e^{-j\vartheta} - e^{j\vartheta})$$

### Omzettingsformules

De omzettingsformules tussen de verschillende vormen zijn dezelfde als de omzettingsformules Ca.Co.  $\leftrightarrow$  Po.Co., namelijk

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} \\ r = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Deze leggen de hoek  $\theta$  (positief indien gemeten in tegenwijzerzin) niet uniek vast. De hoek  $\theta$  kiezen we daarom in het vooraf gekozen interval  $[0, 2\pi[$  of  $]-\pi, \pi]$ .

#### ■ Voorbeeld 1.1 Omzettingen

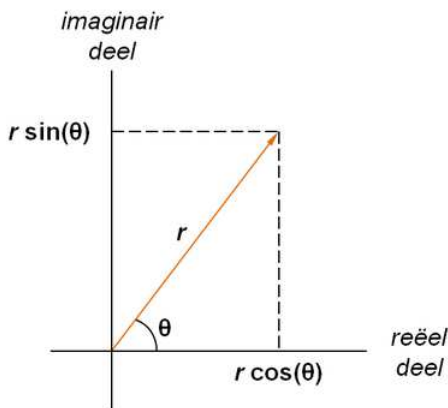
$$z = 1 + j = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$z = -3 = 3 \cos \pi = 3 e^{j\pi}$$

$$z = -4j = 4 j \sin \frac{3\pi}{2} = 4 e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

### Grafische voorstelling

Het vlak waarin we de complexe getallen als koppelp voorstellen noemen we het **vlak van Gauss**.



## 1.3 Bewerkingen met complexe getallen

### 1.3.1 Optellen en aftrekken

Dit is het eenvoudigst in cartesische vorm. De complexe getallen moeten eventueel eerst naar deze vorm omgezet worden.

### 1.3.2 Vermenigvuldigen en delen

Indien het aantal factoren beperkt is en de factoren in cartesische vorm gegeven zijn kan men de bewerking cartesisch uitvoeren. In de andere gevallen is het dikwijls eenvoudiger over te gaan op de goniometrische of exponentiële vorm.

Is  $z_1 = r_1 e^{j\vartheta_1}$  en  $z_2 = r_2 e^{j\vartheta_2}$ , dan is:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{j\vartheta_1} \cdot r_2 e^{j\vartheta_2} = r_1 r_2 e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2)} = r_1 r_2 (\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + j \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\vartheta_1}}{r_2 e^{j\vartheta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\vartheta_1 - \vartheta_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + j \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2))$$

In woorden: vermenigvuldigt (deelt) men twee complexe getallen dan vermenigvuldigt (deelt) men hun modulus en telt (trekt) men de argumenten op (af).

■ **Voorbeeld 1.2** Wat gebeurt er met het beeldpunt van een complex getal in het vlak van Gauss na vermenigvuldigen met  $j$ ?

Het vermenigvuldigen van een complex getal met  $j$  levert:  $zj = r e^{j\vartheta} e^{j\frac{\pi}{2}} = r e^{j(\vartheta + \frac{\pi}{2})}$

Het beeldpunt van  $z$  voert een rotatie uit over een hoek  $\frac{\pi}{2}$  (of een kwartdraai in tegenwijzerzin).

■ **Voorbeeld 1.3** Gegeven:  $z_1 = 3e^{j\frac{\pi}{4}}$  en  $z_2 = 2e^{j\frac{\pi}{2}}$ ;

Gevraagd:  $z_3 = z_1 \cdot z_2$  en  $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$

$$z_3 = z_1 z_2 = 3e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{j\frac{\pi}{2}} = 3 \cdot 2e^{j(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} = 6e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

De modulus van het beeldpunt van  $z_3$  is dubbel zo groot als dit van  $z_1$  en het argument is met een hoek  $\frac{\pi}{2}$  toegenomen t.o.v.  $z_1$ .

$$z_4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{j\frac{\pi}{4}}}{2e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{3}{2}e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}(\cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4})$$

De modulus van het beeldpunt van  $z_4$  is half zo groot als dit van  $z_1$  en het argument is met een hoek  $\frac{\pi}{2}$  afgenomen t.o.v.  $z_1$ .

### 1.3.3 De rotatieformules

Ten opzichte van het assenstelsel  $oXY$  heeft punt  $p$  coördinaten  $(x, y)$ .

Ten opzichte van het assenstelsel  $oX'Y'$ , verkregen na rotatie van  $oXY$  in tegenwijzerzin over een hoek  $\varphi$ , heeft punt  $p$  coördinaten  $(x', y')$ .

$p(x, y)$  kunnen we beschouwen als het beeldpunt van het complex getal  $z = x + yj = re^{j\theta}$  t.o.v.  $oXY$  en als het beeldpunt van het complex getal  $z = x' + y'j = re^{j\theta'}$  t.o.v.  $oX'Y'$ .

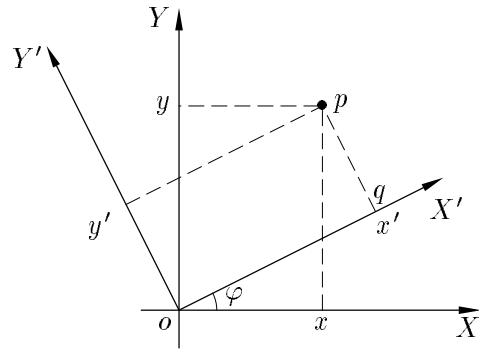
Uit  $\theta = \varphi + \theta'$  volgt:

$$z = x + yj = re^{j\theta} = re^{j(\varphi + \theta')} = re^{j\theta'} e^{j\varphi} = (x' + y'j)(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + (x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)j.$$

Gelijkstellen van reële en imaginaire gedeelten

$$\text{geeft: } \begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$



### 1.3.4 Machtsverheffing

De  $n$ de macht van  $z = re^{j\vartheta}$  is:

$$z^n = (re^{j\vartheta})^n = r^n e^{jn\vartheta} = r^n (\cos n\vartheta + j \sin n\vartheta) \quad \text{met } n \in \mathbb{Z}$$

Het bijzonder geval  $r = 1$  geeft de **formule van de Moivre**:

$$(\cos \vartheta + j \sin \vartheta)^n = \cos n\vartheta + j \sin n\vartheta$$

■ **Voorbeeld 1.4** Toon aan:  $\cos 3\vartheta = 4\cos^3 \vartheta - 3\cos \vartheta$ .

Uitwerking van  $(\cos \vartheta + j \sin \vartheta)^3$  levert:

$$\begin{aligned} (\cos \vartheta + j \sin \vartheta)^3 &= \cos^3 \vartheta + 3j \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + 3j^2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta + j^3 \sin^3 \vartheta \\ &= \cos^3 \vartheta + 3j \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - 3\cos \vartheta \sin^2 \vartheta - j \sin^3 \vartheta \end{aligned}$$

Uit de formule van de Moivre  $(\cos \vartheta + j \sin \vartheta)^3 = \cos 3\vartheta + j \sin 3\vartheta$  volgt:

$$\text{gelijkstelling van reëel deel: } \cos 3\vartheta = \cos^3 \vartheta - 3\cos \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) = 4\cos^3 \vartheta - 3\cos \vartheta$$

$$\text{gelijkstelling van imaginair deel: } \sin 3\vartheta = 3(1 - \sin^2 \vartheta) \sin \vartheta - \sin^3 \vartheta = 3\sin \vartheta - 4\sin^3 \vartheta$$

### 1.3.5 $n$ de machtswortels

Het complex getal  $w = \rho e^{j\varphi}$  is een  $n$ de machtswortel uit  $z = r(\cos \vartheta + j \sin \vartheta) = re^{j\vartheta}$  als:

$$(\rho e^{j\varphi})^n = re^{j\vartheta}$$

$$\text{waaruit: } \begin{cases} \rho^n = r \\ n\varphi = \vartheta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \frac{1}{n}(\vartheta + 2k\pi) \end{cases}$$

Een complex getal  $z$  bezit  $n$  verschillende  $n$ de machtswortels  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ :

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{j\frac{1}{n}(\vartheta + 2k\pi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{1}{n}(\vartheta + 2k\pi) + j \sin \frac{1}{n}(\vartheta + 2k\pi) \right)$$

met  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

In het complex vlak van Gauss zijn de beeldpunten de hoekpunten van een regelmatige  $n$ -hoek ingeschreven in een cirkel met straal  $\sqrt[n]{r}$ .

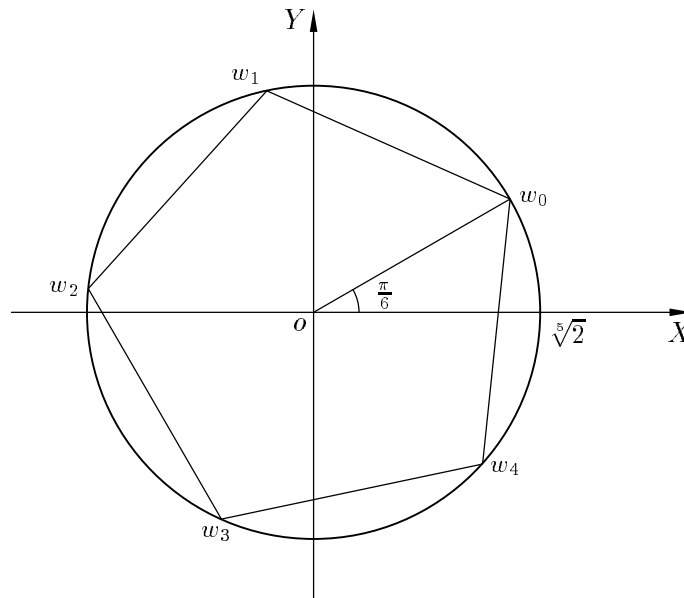
■ **Voorbeeld 1.5** Bepaal de vijfdemachtswortels uit  $z = -\sqrt{3} + j$ .

Een vijfdemachtswortel  $w$  voldoet aan:  $w^5 = -\sqrt{3} + j = z = 2e^{j\frac{5\pi}{6}}$

De wortels  $w_k$  zijn:

$$w_k = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{5} + j \sin \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{5} \right) \quad \text{met } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\Leftrightarrow w_k = \sqrt[5]{2} e^{j(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{5})} = \sqrt[5]{2} \left( \cos(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{5}) + j \sin(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{5}) \right) \quad \text{met } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$



## 1.4 Complexe nulpunten van veeltermen in $\mathbb{C}$

**Eigenschap 1.4.1** Een veelterm van de  $n$ de graad met complexe coëfficiënten heeft juist  $n$  complexe nulpunten in  $\mathbb{C}$ .

! Bij het aantal nulpunten moet rekening gehouden worden met de multipliciteit.

■ **Voorbeeld 1.6 — Multipliciteit.**  $(z-1)^3$  heeft nulpunt  $z=1$  met multipliciteit 3.

$z^3 - 1$  heeft drie verschillende nulpunten.

**Eigenschap 1.4.2** Heeft een veelterm met reële coëfficiënten een niet reëel nulpunt  $z$ , dan is zijn complex toegevoegde  $\bar{z}$  ook een nulpunt.

**Eigenschap 1.4.3** Gevolg: Een veelterm van oneven graad met reële coëfficiënten heeft ten minste één reëel nulpunt.

■ **Voorbeeld 1.7** De veelterm  $3z^3 - 8z^2 + 10z - 4$  heeft nulpunt  $z_1 = 1 + j$ . Bepaal de andere complexe nulpunten.

Uit stelling 2 volgt dat  $z_2 = 1 - j$  eveneens een nulpunt is. De veelterm  $3z^3 - 8z^2 + 10z - 4$  is deelbaar door  $(z - (1 + j)) \cdot (z - (1 - j)) = z^2 - 2z + 2$ .

Na deling vinden we het quotiënt  $3z - 2$ , zodat het derde nulpunt  $z_3 = \frac{2}{3}$  is.

## 1.5 Superpositie van signalen of golven als ingenieurstoepassing

Een harmonische circulaire beweging om de oorsprong in het complexe vlak en met hoeksnelheid  $\omega$ , kan beschreven worden met  $A e^{j\omega t}$ . De projectie op de X-as van het bewegend punt als functie van de tijd kan beschreven worden als  $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ , een typische voorstelling van signalen. Het optellen van 2 signalen kan dikwijls eenvoudiger verlopen door gebruiken te maken van de complexe voorstelling. Bijvoorbeeld: het optellen van

$$\begin{aligned}
 & A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \\
 = & A_1 \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + A_2 \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \\
 = & \left( \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2j} \right) e^{j\omega t} + \left( \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2j} \right) e^{-j\omega t} \\
 = & \left( \frac{A_1}{2} - j \frac{A_2}{2} \right) e^{j\omega t} + \left( \frac{A_1}{2} + j \frac{A_2}{2} \right) e^{-j\omega t} \\
 = & A e^{j\alpha} e^{j\omega t} + A e^{-j\alpha} e^{-j\omega t} \\
 = & A e^{j(\alpha + \omega t)} + A e^{-j(\alpha + \omega t)} \\
 = & 2A \cos(\alpha + \omega t) \\
 \text{met } A \text{ en } \alpha \text{ zodat } & \frac{A_1}{2} - j \frac{A_2}{2} = A e^{j\alpha}.
 \end{aligned}$$

